1. előadás

Vektorterek

K test fölötti vektortér, altér, generált altér, generátorrendszer, lineárisan független rendszer, bázis.

Független rendszer kiegészíthető, generátorrendszer leszűkíthető bázissá.

Dimenzió, bázis véges dimenziós térben, koordinátavektor.

Vektorrendszer rangja $\longrightarrow$ mátrix rangja, ennek kiszámítása.

Lineáris leképezések és transzformációk

Lineáris leképezés, lineáris transzformáció, és ezek mátrixa adott bázispárban, illetve bázisban.

Képtér, magtér, injektív és szürjektív leképezések és izomorfizmusok.

Dimenziótétel, véges dimenziós vektorterek inj., ill. szürjektív transzformációi, koordinátázás mint vektortér-izomorfizmus, előírhatósági tétel.

Lineáris leképezés rangja, mátrixműveletek és leképezések.

Állítás:

$\operatorname{rang}(AB) \le \min\{\operatorname{rang} A,\ \operatorname{rang} B\}$

$|\operatorname{rang} A - \operatorname{rang} B| \le \operatorname{rang}(A+B) \le \operatorname{rang} A + \operatorname{rang} B$

Bizonyítás a gyakorlaton. Gondoljunk a mátrixokra mint lineáris leképezésekre!

Fischer-egyenlőtlenség: Ⓑ Legyenek $C_1, \ldots, C_k \subseteq \{1, \ldots, n\}$ különbözők, és tegyük fel, hogy valamely $1 \le \lambda \le n$-re $|C_i \cap C_j| = \lambda$ minden $i \ne j$-re. Ekkor $k \le n$.

Bizonyítás: Ha van olyan C_i, amely λ elemű, akkor $C_i \subset C_j$ minden $j \ne i$-re, és C_i, $C_j \setminus C_i$ $(i \ne j)$ mind diszjunkt halmazok, így $k \le n$. Ha ilyen halmaz nincs, akkor $|C_i| = \lambda_i + a_i$, ahol $a_i > 0$ $(i = 1, \ldots, k)$. Legyen $M \in \mathbb{R}^{k\times n}$ a halmazok karakterisztikus vektoraiból mint sorokból alkotott mátrix (illeszkedési mátrix): $m_{ij} = 1$, ha $j \in C_i$, és különben 0. Legyen $A = MM^T \in \mathbb{R}^{k\times k}$. Ekkor $a_{ij} = \lambda$, ha $i \ne j$, és $a_{ii} = \lambda + a_i$. Számítsuk ki A determinánsát! Ez a kifejtési tétel szerint megegyezik annk a $(k+1)\times(k+1)$-es mátrixnak a determinánsával, amelyet az A-ból úgy kapunk, hogy fölé teszünk egy csupa 0-ból álló sort, majd az egész elé egy $(1, 0, \ldots, 0)$ oszlopot. Ha most az első sor λ-szorosát kivonjuk mindegyik sorból, majd az i. oszlop $\frac{\lambda}{a_i}$-szeresét hozzáadjuk az első oszlophoz minden i-re, akkor háromszögmátrixot kapunk, amelynek determinánsa $|A| = (1+\frac{\lambda}{a_1}+\ldots\frac{\lambda}{a_k})a_1\cdots a_k > 0$, így $k = \operatorname{rang} A = \operatorname{rang}(MM^T) \le \operatorname{rang} M \le n$.