3. előadás

Mátrixok invariánsai

Hasonló mátrixokra megegyezik a karakterisztikus polinom, minimálpolinom, determináns, rang, spektrum, sajátaltér dimenziója.

Vektorterek direkt összege

Direkt összeg definíciója három ekvivalens feltétellel:

(i) $\sum_{i=1}^{k} V_i = V$ és $V_i \cap \sum_{j \neq i} V_j = \{\mathbf{0}\}$;

(ii) V minden eleme egyértelműen írható $\mathbf{v}_1 + \ldots + \mathbf{v}_k$ alakban;

(iii) van V-nek $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{B}_k$ bázisa, hogy $\mathcal{B}_i$ bázisa V_i-nek.

Invariáns altér, mátrix felírása $U \oplus W$ felbontáshoz illő bázisban, ahol az egyik vagy mindkét altér A-invariáns.

Blokkmátrixok szorzása.

Tétel: Ⓑ Ha $A \in K^{n\times n}$ minimálpolinomja $m(x) = f(x)g(x)$, ahol $f(x), g(x) \in K[x]$ relatív prím, 1 főegyütthatós polinomok, akkor A hasonló egy olyan blokkdiagonális mátrixhoz, amelynek a diagonális blokkjai $f(x)$, illetve $g(x)$ minimálpolinomúak.

Tétel (az előző tétel következménye): Egy mátrix pontosan akkor diagonalizálható, ha minimálpolinomja különböző gyöktényezők szorzatára bomlik:
$m(x) = (x - c_1)(x - c_2)\cdots(x - c_k)$, ahol $c_1, \ldots, c_k$ különbözők.

Jordan-féle normálalak

Jordan-blokk, Jordan-mátrix definíciója.

Tétel: Minden komplex négyzetes mátrix hasonló egy Jordan-mátrixhoz, és ez a Jordan-mátrix a blokkok sorrendjétől eltekintve egyértelmű.

Bizonyítás vázlata: A korábbi tétel miatt a mátrix felírható olyan blokkdiagonális mátrixként, amelyek diagonális blokkjainak minimálpolinomja $(x - \lambda)^{\beta}$ alakú. Az ilyenek Jordan-normálalakja visszavezethető az x^{β} alakú minimálpolinommal rendelkező N mátrixok normálalakjára. Ehhez úgy választunk alkalmas bázist, hogy azon a transzformáció $\mathbf{b}_1 \mapsto \cdots \mapsto \mathbf{b}_{t_1} \mapsto \mathbf{0}$, $\mathbf{b}_{t_1+1} \mapsto \ldots \mapsto \mathbf{b}_{t_2} \mapsto \mathbf{0}$, stb. módon hasson.

A Jordan-normálalak felhasználása:

Eldönthető vele két mátrix hasonlósága.
Könnyen hatványozható, így alkalmas A^n, illetve A más függvényeinek kiszámítására.
Jobban megérthető belőle egy lineáris transzformáció hatása.

Jordan-normálalak meghatározása a bázis megkeresése nélkül: az $A - \lambda I$ hatványainak rangjából megállapítható, hogy milyen méretű λ-blokkból hány van.

Ha $k_A(x)$-ben minden sajátérték legföljebb 6 multiplicitású, akkor a Jordan-normálalakban a λ-blokkok méretének meghatározásához elegendő:

$k_A(x)$-ben $(x - \lambda)$ kitevője: ez a λ-blokkok méretének összege;
$m_A(x)$-ben $(x - \lambda)$ kitevője: ez a legnagyobb λ-blokk mérete;
a λ-hoz tartozó sajátaltér dimenziója: ez a λ-blokkok száma.