8. előadás

Mátrixok általánosított inverzei (folyt.)

Általánosított inverz:

Definíciója: A' az A-nak általánosított inverze, ha $AA'A = A$.

Kiszámítása: SAP-módszerrel. Az $A \in K^{m\times n}$ mátrixot elemi sorműveletekkel redukált lépcsős alakra hozzuk (a melléírt, illeszkedő méretű egységmátrix közben az S mátrixszá alakul), majd ezt elemi oszlopműveletekkel $\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ alakra hozzuk (az oszlopműveletek elkezdésénél aláírt, illeszkedő méretű egységmátrixból ezzel P lesz). Az összes általánosított inverzet megkapjuk $P\begin{bmatrix} I_r & X \\ Y & Z \end{bmatrix}S$ alakban, ahol X, Y, Z tetszőleges mátrixok, amelyekkel a középső mátrix $n \times m$-es lesz, és $r = \mathrm{rang}(A)$.

Állítás: Ha az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ egyenletrendszernek van megoldása, és A' az A egy általánosított inverze, akkor $A'\mathbf{b}$ egy megoldása az egyenletrendszernek.

Megj. Akkor célszerű alkalmazni, ha ugyanazzal a mátrixszal sok különböző konstansú egyenletrendszert kell megoldani. Viszont mindig ellenőrizni kell, hogy valóban megoldást kaptunk-e (ha nem, akkor nincs megoldás).

Moore–Penrose-féle pszeudoinverz

Definíciója: $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ mátrix pszeudoinverze az $A^+ \in \mathbb{C}^{n\times m}$ mátrix, ha
(1) $AA^+A = A$
(2) $A^+AA^+ = A^+$
(3) $(AA^+)^* = AA^+$
(4) $(A^+A)^* = A^+A$

Állítás: Ⓑ $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$-nek $\mathbf{x} = A^+\mathbf{b}$ az egyik legjobban közelítő megoldása (azaz amelyre $A\mathbf{x} - \mathbf{b}$ minimális).

A pszeudoinverz egyértelmű.

A pszeudoinverz kiszámítása:
Teljes rangú esetek: ha $\mathrm{rang}\,A = m$, akkor $A^+ = A^*(AA^*)^{-1}$, ha $\mathrm{rang}\,A = n$, akkor $A^+ = (A^*A)^{-1}A^*$.
Általános eset: $\mathrm{rang}\,A = r$ esetén A felbontható két teljes rangú mátrix szorzatára: $A = BC$, ahol $B \in \mathbb{C}^{m\times r}$ és $C \in \mathbb{C}^{r\times n}$, és ekkor $A^+ = C^+B^+$. A BC-felbontást Gauss-módszerrel végezzük: redukált lépcsős alakra hozás után B az A-nak a lépcsős alak vezéregyesei oszlopának megfelelő sorszámú oszlopaiból áll, C pedig a redukált lépcsős alak nem nulla soraiból.