

9. előadás

SVD: Szinguláris értékek szerinti felbontás

Önadjungált, pozitív definit mátrixok SVD-je: a spektrális felbontás UDU^*

Önadjungált, de nem pozitív definit mátrixok SVD-je: a spektrális UDU^* módosításával $U'D'U^*$, ahol D' átlós elemei a sajátértékek abszolút értékei, U' -t pedig U -ból úgy kapjuk, hogy a negatív sajátértékekhez tartozó oszlopokat -1 -gyel szorozzuk.

⊕ $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ -re A^*A önadjungált, pozitív szemidefinit mátrix, amelyre $\text{rang}(A^*A) = \text{rang } A$.

Definíció: $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $r = \text{rang } A$ esetén A **szinguláris értékei** $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$, ahol $\sigma_1^2 \geq \sigma_2^2 \geq \dots \geq \sigma_r^2$ az A^*A nemnulla sajátértékei.

Tétel (SVD)

Legyen $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, és $\text{rang } A = r$. Ekkor $\exists M' \in \mathbb{C}^{m \times m}$ és $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ unitérek, hogy $A = M'\Sigma'M^*$, ahol $\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, és $\Sigma \in \mathbb{R}^{r \times r}$ az A szinguláris értékeit fogyó sorrendben tartalmazó diagonális mátrix.

Egyértelműség: Ha $A = UDV$, ahol U, V unitérek és D diagonális, monoton fogyó nemnegatív diagonális elemekkel, akkor $D = \Sigma'$.

SVD kiszámítása: A^*A sajátértékei $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$, $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$ $i = 1, \dots, r$, és a λ_i -khez tartozó sajátvektorokból álló ortonormált bázis (a sajátértékek csökkenő sorrendjében) az M oszlopai (a sajátalterek merőlegesek egymásra, de ha van többdimenziós sajátaltér, akkor azon belül ortogonalizálni kell). $AM = [T|0]$, ahol T nemnulla oszlopokból áll, és $T^*T = \Sigma^2$. T oszlopait a σ_i -kkel leosztva kapjuk T' -t: $T' = T\Sigma^{-1}$, és $M' = [T'|T_1]$ unitér.

Tétel (Redukált SVD): Legyen $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, és $\text{rang } A = r$. Ekkor $\exists U \in \mathbb{C}^{n \times r}$ és $U' \in \mathbb{C}^{m \times r}$, hogy $U^*U = (U')^*U' = I_r$, és $A = U'\Sigma U^*$.

Redukált SVD kiszámítása Az SVD-ből U az M első r oszlopa, U' pedig az M' első r oszlopa. De az SVD kiszámítása során ekkor elég A^*A nemnulla sajátértékeihez sajátvektorokat keresni (r függetlent, amelyek ortonormált rendszert alkotnak), és AU oszlopait lenormálva kapjuk U' -t.

Ha $A = M'\Sigma'M^*$ SVD-felbontás, és U, V unitér, akkor $A^* = M(\Sigma')^T(M')^*$, $UA = (UM')\Sigma'M^*$ és $AV = M'\Sigma'(V^*M)^*$ is SVD-felbontás.

Alkalmazások: Legyen $A = M'\Sigma'M^* = U'\Sigma U^*$ SVD, illetve redukált SVD.

1. Poláris felbontás: $A = PQ$, ahol $P = M'\Sigma'(M')^*$ pozitív szemidefinit és $M'M^*$ unitér.
2. Pszeudoinverz: $A^+ = U\Sigma^{-1}(U')^*$.
3. $Ax = 0$ legjobb közelítő megoldása az egységkörön: M utolsó oszlopa (a hiba σ_n , ill. $r < n$ esetén 0).
4. Alacsony rangú közelítés (Eckart–Young-tétel): $k \leq r$ -re $A^{(k)} = (U')^{(k)}\Sigma^{(k)}(U^{(k)})^*$ a legjobb k rangú közelítése az A mátrixnak, ahol $(U')^{(k)}$ és $U^{(k)}$ az U' , illetve U első k oszlopából áll, és $\Sigma^{(k)}$ a Σ bal felső $k \times k$ -as részmátrixa. A közelítés hibája $\|A - A^{(k)}\| = \sqrt{\sigma_{k+1}^2 + \dots + \sigma_r^2}$.

Mögöttes szemantikájú indexelés (mese)