10. előadás

Pozitív mátrixok

Definíció: pozítív és nemnegatív mátrix, $A \geq B$, $A > B$
Ha $A > 0$ és $\mathbf{0} \neq \mathbf{v} \geq 0$, akkor $A\mathbf{v} > 0$.
Spektrálsugár, $\rho(A)$: a sajátértékek abszolút értékének maximuma

Perron-tétel:
Minden $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ pozitív mátrixnak olyan $\lambda \in \mathbb{R}$ sajátértéke, amelyre
(1) Ⓑ $\lambda > 0$, és λ-hoz van $\mathbf{v} > 0$ valós sajátvektor;
(2) Ⓑ az A összes többi $\kappa \in \mathbb{C}$ sajátértékére $|\kappa| < \lambda$;
(3) λ csak egyszeres gyöke a $k_A(x)$ karakterisztikus polinomnak;
(4) semelyik másik sajátértékhez nincs nemnegatív sajátvektor.

Megj.: A Perron-tételben szereplő λ sajátérték a (2) miatt $\rho(A)$-val egyenlő.

Nemnegatív mátrixok

Tétel: Ha $A \geq 0$, akkor

$$\text{a legkisebb sorösszeg} \leq \rho(A) \leq \text{a legnagyobb sorösszeg}$$
$$\text{a legkisebb oszlopösszeg} \leq \rho(A) \leq \text{a legnagyobb oszlopösszeg}$$

Tétel: Ha $A \geq 0$, akkor $\rho(A)$ sajátérték nemnegatív sajátvektorral.

Irreducibilis mátrixok definíciója és különböző jellemzései (permutációmátrixszal nem konjugálható valódi felső blokkháromszögmátrixba; a gráfja erősen összefüggő, $(A+I)^n > 0$).

Frobenius-tétel: $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ nemnegatív, irreducibilis mátrixnak $\rho(A)$ sajátértéke pozitív sajátvektorral, és $\rho(A)$ egyszeres gyöke a karakterisztikus polinomnak.

Primitív mátrix: irreducibilis mátrix, amelyre $\rho(A)$ nagyobb az A minden más sajátértékének az abszolút értékénél

Tétel: Egy $A \geq 0$ irreducibilis mátrix akkor és csak akkor primitív, ha van olyan $k > 0$, hogy $A^k > 0$.