11. előadás

Primitív mátrixok (folyt.)

mátrixsorozat limesze

Lemma: $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $\rho(B) < 1 \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} B^k = 0$

Tétel: $A \geq 0$ primitív $\Rightarrow \left(\frac{A}{\rho(A)}\right)^k \to \mathbf{v}\cdot\mathbf{u}^T$, ahol $\mathbf{v}$ az A-nak $\rho(A)$-hoz tartozó sajátvektora, $\mathbf{u}$ az A^T-nak $\rho(A^T) = \rho(A)$-hoz tartozó sajátvektora, és $\mathbf{u}^T\mathbf{v} = 1$.

Ⓑ A primitív mátrixokat jellemző tétel (A irred. mátrix primitív $\Leftrightarrow \exists\, k > 0$: $A^k > 0$) bizonyítása.

Példák primitív mátrixokra.

Mátrix primitivitásának eldöntésénél használható állítások

1) Ha A irreducibilis, és $A^k > 0$, akkor $A^{k+1} > 0$ (tehát egy primitív mátrixnak valahonnan kezve pozitívak a hatványai).

2) Ha A irreducibilis, és A gráfjában van hurokél (azaz A átlójában van pozitív elem), akkor A primitív.

3) Ha A irreducibilis, akkor A akkor és csak akkor primitív, ha A gráfjában az irányított körök hosszának legnagyobb közös osztója 1.

Sztochasztikus mátrixok

Definíciók: sztochasztikus mátrix, sztochasztikus vektor, véges állapotú homogén Markov-lánc

Állítás: Sztochasztikus mátrix spektrálsugara 1.

Következmény: Ha A sztochasztikus primitív mátrix, akkor $A^k \to \mathbf{v}\cdot[\,1 \quad 1 \quad \ldots \quad 1\,]$, ahol $\mathbf{v}$ az A mátrix 1 sajátértékhez tartozó sztochasztikus sajátvektora. Így tetszőleges kiinduló $\mathbf{v}^{(0)}$ valószínűségeloszlás esetén $A^k\mathbf{v}^{(0)} \to \mathbf{v}$.