12. előadás

Mátrixok QR-felbontása

Egy $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix felbontása $A = QR$ alakra, ahol Q unitér (azaz ortogonális), R pedig felső háromszögmátrix.

Invertálható A-ra: Az A^*A szimmetrikus mátrixot **szimultán sor-oszlopműveletekkel** diagonális alakra hozzuk. Mivel A^*A pozitív szemidefinit és invertálható, el tudjuk érni, hogy ez a diagonális alak az I legyen, és az ehhez használt sorműveletek egy sor többszörösének egy nagyobb indexű sorhoz való hozzáadása vagy egy sor megszorzása egy nem nulla konstanssal. Tehát $GA^*AG^* = I$, ahol G alsó háromszögmátrix. Ebből következik, hogy $Q := AG^*$ unitér, és G^*, és így $(G^*)^{-1}$ is felső háromszögmátrix. Tehát $A = Q(G^*)^{-1}$ megfelelő alakú felbontás.

Általában alkalmazható a **Householder-tükrözések** módszere:
Tetszőleges $\mathbf{v}$ és $\mathbf{w}$ nem nulla vektorokhoz van olyan tükrözés, amely $\mathbf{v}$-t a $\mathbf{w}$ egy skalárszorosába, $\mathbf{w}_0 = \frac{|\mathbf{v}|}{|\mathbf{w}|}\mathbf{w}$-be viszi. Ez az $\mathbf{n} = \mathbf{v} - \mathbf{w}_0$ normálvektorú hipersíkra való tükrözés, amelynek mátrixa $I - 2\frac{\mathbf{n}\mathbf{n}^T}{|\mathbf{n}|^2}\mathbf{n}$. Ezek a tükrözések unitér transzformációk, így a szorzatuk is az. Az A mátrixot ilyen unitér mátrixokkal való balszorzással hozzuk felső háromszögalakra. A Q_1 olyan tükrözés, ami A első oszlopát $\mathbf{e}_1$ skalárszorosába viszi. Amikor a mátrix első k oszlopa már megfelel a felső háromszögalaknak, akkor a jobb alsó $(n-k)\times(n-k)$-as részmátrix első oszlopához választunk Q'_{k+1}-et, és a teljes mátrixot a $Q_{k+1} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & Q'_{k+1} \end{bmatrix}$ szintén unitér mátrixszal szorozzuk meg. Így $Q_n \cdots Q_2 Q_1 A = R$ felső háromszögmátrix, tehát a $Q = (Q_n \cdots Q_1)^{-1} = Q_1^* \cdots Q_n^*$ unitér mátrixszal az $A = QR$ felbontást kapjuk.

A QR-felbontás alkalmazása

Sajátértékek közelítő kiszámítása: Az $A_1, A_2, \ldots$ mátrixsorozat, ahol $A_1 = A$, $A_i = Q_i R_i$, $A_{i+1} = R_i Q_i = Q_{i+1} R_{i+1}$, ha konvergens, olyan $\tilde{A}$ felső háromszögmátrixhoz konvergál, amelynek sajátértékei (és így az átlós elemei) megegynek A sajátértékeivel,
és a $Q = Q_1 Q_2 \cdots$ unitér mátrixszal $\tilde{A} = Q^*AQ$.

A zh-feladatok megbeszélése