1. Melyek alkotnak vektorteret $\mathbb{R}$ fölött az alábbiak közül? A vektortereknek adjuk meg egy bázisát!

a) 3×3-as valós felső háromszögmátrixok a szokásos műveletekkel;
b) invertálható 2×2-es valós mátrixok;
c) azok a legföljebb 4-edfokú valós polinomok, amelyeknek gyöke a -1;
d) a valós számpárok az $(a, b) \oplus (c, d) = (a + d, b + c)$ összeadásra és $\lambda \cdot (a, b) = (\lambda a, \lambda b)$ skalárral való szorzásra nézve;

2. Adjuk meg a következő lineáris leképezések mátrixát a megadott bázisban, illetve bázispárban:

a) A tér $90°$-os forgatása a z tengely körül, a standard bázisban.
b) $p(x) \mapsto (xp(x))'$ a legföljebb másodfokú valós polinomok terén, a standard $\{ 1, x, x^2 \}$ bázisban;
c) az $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$, ahol $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$, $\mathcal{B} = \{(1, 2), (1, 1) \}$;
d) $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, amelyre $\varphi(1, 2, 1) = (0, 2, 1)$, $\varphi(1, 1, 1) = (1, 0, 0)$, $\varphi(1, 0, 0) = (-1, 0, 0)$, a standard bázisban;
e) $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\varphi(x, y) = (x + y, y, x)$, $\mathcal{B}_1 = \{(1, 1), (2, 0) \}$, $\mathcal{B}_2 = \{(1, 2, 1), (-1, 1, 0), (0, 1, 1) \}$ bázispárban;
f) Az $x - 2y + z = 0$ síkra való merőleges vetítés standard bázisban;
g) Transzponálás a 2×2-es valós mátrixok terén.

3. Adjunk meg olyan f lineáris transzformációt az $\mathbb{R}^3$ vektortéren, amelyre

a) $0 \neq \operatorname{Ker} f \subseteq \operatorname{Im} f$;
b) $\operatorname{Ker} f$ 1 dimenziós, és $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{ \mathbf{0} \}$;
c) $\operatorname{Im} f$ 2 dimenziós, és f az $\operatorname{Im} f$ minden vektorát önmagába viszi;
d) $f^3 = 0$, de $f^2 \neq 0$ (ahol a szorzás a kompozíciót jelenti).

4. Írjuk fel az $f : (x, y, z) \longmapsto (x + y - 2z, x + z, 2x + y - z, -x - z)$ leképezés standard mátrixát! Adjuk meg a mátrix nullterének (azaz a leképezés magterének), a oszlopterének (azaz a leképezés képterének) és sorterének egy-egy bázisát!

5. Bizonyítsuk be, hogy

a) $\operatorname{rang}(AB) \leq \min \{ \operatorname{rang} A, \operatorname{rang} B \}$, ahol $A \in K^{k \times m}$ és $B \in K^{m \times n}$;
b) $|\operatorname{rang} A - \operatorname{rang} B| \leq \operatorname{rang}(A + B) \leq \operatorname{rang} A + \operatorname{rang} B$, ahol $A, B \in K^{m \times n}$.

(*Útmutatás: Lássuk be, hogy a mátrixokat természetes módon lineáris leképezéseknek tekintve* $\operatorname{Im} AB \leq \operatorname{Im} A$, $\operatorname{Ker} AB \geq \operatorname{Ker} B$ *és* $\operatorname{Im}(A + B) \leq \langle \operatorname{Im} A, \operatorname{Im} B \rangle$.)

6. Lássuk be, hogy ha $A \in K^{m \times n}$, továbbá $B \in K^{m \times m}$ és $C \in K^{n \times n}$ invertálható mátrixok, akkor $\operatorname{rang} BA = \operatorname{rang} AC = \operatorname{rang} A$.

7. Mutassuk meg, hogy minden $A \in K^{m \times n}$ r rangú mátrixhoz van olyan invertálható $P \in K^{n \times n}$ és $Q \in K^{m \times m}$ mátrix, amire a $B = Q^{-1}AP$ mátrixban $b_{11} = \ldots = b_{rr} = 1$, és minden más elem 0.

8. Legyen f lineáris transzformáció egy 6 dimenziós vektortéren. Lehet-e az f, f^2, f^3, f^4 leképezések rangja a következő sorozat?

a) $3, 4, 2, 2$ b) $6, 5, 4, 3$ c) $5, 4, 4, 4$ d) $5, 3, 2, 1$ e) $3, 2, 1, 0$

9. Mutassuk meg, hogy bármely 3×3-as valós mátrixnak van valós sajátvektora.

10. Bizonyítsuk be, hogy A minden sajátvektora sajátvektora A^2-nek is. Igaz-e az állítás megfordítása?

11. Melyek azok az $n \times n$-es valós mátrixok, amelyeknek $\mathbb{R}^n$ minden $\mathbf{0}$-tól különböző vektora sajátvektora?

12. Határozzuk meg a 2. feladatban szereplő lineáris transzformációk sajátértékeit és sajátvektorait!

13. Melyik c egész számokra nincs olyan $f(x)$ egész együtthatós polinom, amelyre $f(1) = 0$, $f(2) = 2$ és $f(0) = c$?