1. Van-e olyan 3×3-as mátrix $\mathbb{Q}$ fölött, amelynek minimálpolinomja
a) $x^2 - 2$;
b) $x^2 + x$?

2. Tegyük föl, hogy egy $\mathbb{C}$ fölötti A mátrixra teljesül az $A^m = I$ egyenlőség valamilyen $m \geq 1$ esetén. Igazoljuk, hogy A diagonalizálható!

3. Milyen kapcsolat van AB és BA minimálpolinomjai között, ha A és B négyzetes mátrixok? Lássuk be, hogy AB és BA sajátértékei megegyeznek!

4. Melyik mátrixok diagonalizálhatók $\mathbb{C}$ fölött a következők közül? Mi a Jordan-normálalakja azoknak, amelyek nem diagonalizálhatók?

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

5. Hány olyan nem hasonló komplex mátrix van, amely kielégíti az alábbi feltételeket? Írjuk fel a lehetséges mátrixok Jordan-féle normálalakját!
a) $k(x) = -x^5(x+1)^2$, $m(x) = x^3(x+1)$;
b) $k(x) = (x-1)^4 x$, és az 1-hez tartozó sajátaltér 2-dimenziós.

6. Adjunk meg két olyan 7×7-es mátrixot, amelyeknek a minimálpolinomja és a karakterisztikus polinomja is ugyanaz, sőt minden sajátaltere is ugyanannyi dimenziós, de a két mátrix nem hasonló!

7. Számítsuk ki az alábbi mátrixok n-edik hatványát a diagonális, illetve a Jordan-féle normálalak segítségével!

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

8. Bizonyítsuk be, hogy minden $n \times n$-es komplex mátrix hasonló a transzponáltjához! (Használjuk a Jordan-normálalakot!)

9. Van-e olyan $I \neq A \in \mathbb{Q}^{n \times n}$ mátrix, amelyre a) $A^3 = I$; b) $A^5 = I$? És 2×2-ben?

10. Bizonyítsuk be, hogy ha $m_A(x) = f(x)g(x)$, ahol $f(x)$ és $g(x)$ relatív prímek, akkor $\operatorname{Im} f(A) = \operatorname{Ker} g(A)$.