1. Van-e olyan $U \leq \mathbb{F}_2^n = V$, hogy
a) $U = U^\perp$;
b) $V = U \oplus U^\perp$?

2. Bizonyítsuk be, hogy $V = \mathbb{F}_3^2$-ben minden U altérre $V = U \oplus U^\perp$, de $\mathbb{F}_3^3$-ben ez nem igaz!

3. Legyen V vektortér egy $\langle\ ,\ \rangle$ bilineáris függvénnyel, és legyen $U \leq V$. Bizonyítsuk be, hogy ha U-nak van olyan ortogonális bázisa, amelynek semelyik eleme sem merőleges önmagára, akkor $V = U \oplus U^\perp$.

4. Ellenőrizzük, hogy a Hamming-kód perfekt!

5. Határozzuk meg az Hadamard-kód duálisának dimenzióját, kódhosszát, kódtávolságát!

6. $m = 3$ paraméterű Hadamard-kóddal elkódolva érkezett ez az üzenet:
8520 4C2F 3454 3C38 10C3 2434 F055 6855 34B0 A8A2
(a rövidség kedvéért a bináris üzenetet átírtuk hexadecimálissá). Az angol abc huszonhat betűjét ötjegyű bináris számokkal kódoltuk el eredetileg, 00001-től 11010-ig, a szóköz a 00000, majd négyes csoportokra osztva alkalmaztuk rá az Hadamard-kódot (a vektortér elemeit is a bináris számok sorrendjében, 000-tól 111-ig helyettesítettük be). Fejtsük meg az üzenetet! (Kettőnél több hiba egyik kódszóba se csúszott; ahol kettő van, írjuk fel a lehetséges javításokat, és a szöveg értelme szerint találjuk ki, hogy mi a megfejtés!)

7. Adjunk meg ortogonális, illetve ortonomált bázist az $\mathbb{R}^4$ $(1, 2, -1, 0)$, $(2, 1, 0, 1)$ és $(1, -1, 1, -1)$ vektorok által generált alterében!

8. Legyen $V = \mathbb{R}^5$ a szokásos skalárszorzattal, és U azon vektorok halmaza, amelyekben az első két koordináta összege egyenlő az utolsó két koordináta összegével.
a) Adjunk meg U-ban egy ortonormált bázist!
b) Határozzuk meg $U^\perp$ elemeit!
c) Írjuk fel az (1,0,0,0,0) vektort egy U-beli és egy $U^\perp$-beli vektor összegeként!

9. Az alábbi mátrixok közül melyek határoznak meg szimmetrikus bilineáris, illetve hermitikus bilineáris függvényt? Ezeket hozzuk diagonális alakra, és állapítsuk meg, milyen definitek! A valósakhoz adjunk is meg ortogonális bázist!

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} -1 & 2+i \\ 2-i & 2 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad F = \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix}$$

10. Adjunk példát olyan komplex (és nem valós) önadjungált mátrixra, amely negatív szemidefinit, és nem negatív definit!

11. Bizonyítsuk be, hogy ha egy $\langle\ ,\ \rangle$ valós szimmetrikus vagy komplex hermitikus bilineáris függvény nem pozitív vagy negatív definit, akkor van olyan $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ vektor, amelyre $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0$.