1. A következő mátrixok közül melyik önadjungált, unitér, illetve normális? Az önadjungáltak milyen definitek?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} i & i \\ i & -i \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad F = \begin{bmatrix} -1 & 2+i \\ 2-i & -5 \end{bmatrix} \qquad G = \begin{bmatrix} 1/3 & -2/3 & -2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \\ 2/3 & -1/3 & 2/3 \end{bmatrix} \qquad H = \begin{bmatrix} 1 & i \\ 1+i & 0 \end{bmatrix}$$

2. Határozzuk meg az összes 2×2-es valós, ortogonális mátrixot! Milyen geometriai transzformációkat adnak a síkon ezek a mátrixok?

3. Bizonyítsuk be, hogy minden 1 determinánsú, 2×2-es valós normális mátrix szimmetrikus vagy ortogonális! Mutassunk példát arra, hogy ez az állítás 3×3-as mátrixokra nem igaz!

4. Adjunk példát olyan $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ transzformációra, amelynek minden sajátértéke 1 abszolút értékű, de a transzformáció nem unitér!

5. A Schur-felbontás bizonyítását követve, hozzuk unitérrel háromszög alakra az $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ mátrixot!

6. Legyen a $V(a_1, \ldots, , a_n)$ Vandermonde-mátrix i. sora $[1 \quad a_1 \quad a_1^2 \quad \ldots \quad a_1^{n-1}]$ minden i-re. Bizonyítsuk be, hogy ennek a mátrixnak a determinánsa $\prod_{i>j}(a_i - a_j)$.

7. Írjuk fel az
a) $\mathbb{R}^3$ tér $x - y + z = 0$ síkjára való merőleges vetítés és tükrözés, illetve
b) a $\mathbb{R}^4$ tér $(1, 0, 1, -1)$ és $(0, 1, 1, -1)$ vektorok által kifeszített alterére való merőleges vetítés mátrixát!

8. Számítsuk ki az $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ és az $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ mátrixok pszeudoinverzét!

9. a) Adjuk meg az $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 4}$ mátrix pszeudoinverzét és egy 3 rangú általánosított inverzét!
b) Bizonyítsuk be, hogy az $\{\, A' - A^+ \mid A' \text{az } A \text{ mátrix egy általánosított inverze} \,\}$ halmaz altere a $\mathbb{R}^{4\times 3}$ vektortérnek! Hány dimenziós ez az altér?
c) A pszeudoinverz felhasználásával határozzuk meg az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer legjobban közelítő megoldását $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$-re, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$-re és $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$-ra.

10. Bizonyítsuk be, hogy ha A^+ az $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ mátrix pszeudoinverze, és $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ unitér, akkor $(AU)^+ = U^{-1}A^+$. Adjunk példát arra, hogy ha U nem unitér, csak invertálható, akkor $U^{-1}A^+$ nem feltétlenül lesz az AU pszeudoinverze.

11. Mi lehet a rangja egy r rangú, $m \times n$-es mátrix általánosított inverzének? És a pszeudoinverzének?

12. Bizonyítsuk be, hogy egy teljes rangú mátrix bármely általánosított inverze egyoldali inverz.