1. Legyenek $B \in \mathbb{C}^{m\times r}$ és $C \in \mathbb{C}^{r\times n}$ r rangú mátrixok. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $A = BC$ is r rangú, és $A^+ = C^+B^+$.

2. Adjuk meg a következő mátrixok SVD- és redukált SVD-felbontását!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & -3 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & i \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -4 \end{bmatrix} \qquad E = \begin{bmatrix} 2 & -11 \\ 10 & -5 \end{bmatrix}$$

3. A 2. feladat mátrixainak SVD- (vagy redukált SVD-) alakját felhasználva oldjuk meg a következő feladatokat!

a) Írjuk fel D poláris felbontását!

b) Adjuk meg az $E\mathbf{x} = \mathbf{0}$ legjobb közelítő megoldását az egységkörön!

c) Határozzuk meg A pszeudoinverzét!

d) Adjuk meg a D-t legjobban közelítő 1 rangú mátrixot!

4. Adjuk meg az $A = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$ pozitív definit mátrix SVD-felbontását, és ennek segítségével adjunk meg olyan pozitív definit B mátrixot, amelyre $B^2 = A$

5. Bizonyítsuk be, hogy ha U és V unitér, akkor $||UA|| = ||A|| = ||AV||$, feltéve, hogy az UA és AV szorzatok léteznek.

6. Legyen $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Igazoljuk, hogy minden 1 hosszúságú $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ vektorra $\sigma_n \le |A\mathbf{v}| \le \sigma_1$, ahol $\sigma_1 \ge \sigma_2 \ge \cdots$ az A szinguláris értékei (beleszámítva a 0-kat is).

7. Legyen $A = M'\Sigma'M^* = U'\Sigma U^*$ az A SVD- és redukált SVD-felbontása. Lássuk be, hogy

a) $|A(Me_n)| = \sigma_n$;

b) $||A - A^{(k)}|| = \sqrt{\sum_{i=k+1}^{n} \sigma_i^2}$;

c) $A^+ = U\Sigma^{-1}(U')^*$.

8. Legyen $B = \begin{bmatrix} 0 & A \\ A^T & 0 \end{bmatrix}$ blokkmátrix, ahol $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Milyen összefüggés van A szinguláris értékei és B sajátértékei között?