1. *Melyek alkotnak vektorteret $\mathbb{R}$ fölött az alábbiak közül? A vektortereknek adjuk meg egy bázisát!*

a) 3×3*-as valós felső háromszögmátrixok a szokásos műveletekkel;*
b) invertálható 2×2*-es valós mátrixok;*
c) azok a legföljebb 4-edfokú valós polinomok, amelyeknek gyöke a -1*;*
d) a valós számpárok az $(a,b) \oplus (c,d) = (a+d, b+c)$ *összeadásra és* $\lambda \cdot (a,b) = (\lambda a, \lambda b)$ *skalárral való szorzásra nézve;*

Megoldás: a) Vektortér, mert a $\mathbb{R}^{3\times 3}$ altere: felső háromszögmátrixok összege és skalárszorosa is felső háromszögmátrix. Bázisa $\{\, E_{ij} \mid i \le j \,\}$, ahol E_{ij} az a mátrix, amelyben az i. sor j. eleme 1, a többi 0.

b) Nem vektortér. Bár részhalmaza az $\mathbb{R}^{2\times 2}$ vektortérnek, nem altere annak: invertálható mátrix 0-szorosa nem invertálható. De ha a 0 mátrixot hozzávesszük, akkor sem kapunk alteret: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ nem invertálható.

c) Vektortér, mert az $\mathbb{R}[x]$ vektortér altere (ilyen polinomok összege és skalárszorosa is ilyen). Bázisa: $\{\, x-1,\ (x-1)x,\ (x-1)x^2,\ (x-1)x^3 \,\}$.

d) Nem vektortér: $(a,b) \oplus (c,d) = (a+d, b+c)$, de $(c,d) \oplus (a,b) = (c+b, a+d)$, tehát a $\oplus$ művelet nem kommutatív.

2. *Adjuk meg a következő lineáris leképezések mátrixát a megadott bázisban, illetve bázispárban:*

a) A tér $90°$*-os forgatása a* z *tengely körül, a standard bázisban.*
b) $p(x) \mapsto (xp(x))'$ *a legföljebb másodfokú valós polinomok terén, a standard* $\{\, 1, x, x^2 \,\}$ *bázisban;*
c) az $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$*, ahol* $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$, $\mathcal{B} = \{(1,2),(1,1)\,\}$*;*
d) $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$*, amelyre* $\varphi(1,2,1) = (0,2,1)$, $\varphi(1,1,1) = (1,0,0)$, $\varphi(1,0,0) = (-1,0,0)$*, a standard bázisban;*
e) $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\varphi(x,y) = (x+y, y, x)$, $\mathcal{B}_1 = \{(1,1),(2,0)\,\}$, $\mathcal{B}_2 = \{(1,2,1),(-1,1,0),(0,1,1)\,\}$ *bázispárban;*
f) Az $x - 2y + z = 0$ *síkra való merőleges vetítés standard bázisban;*
g) Transzponálás a 2×2*-es valós mátrixok terén.*

Megoldás: a) $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

d) $A \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

f) Az (x,y,z) vektor vetülete a sík $(1,-2,1)$ normálvektorára $\dfrac{(x,y,z)(1,-2,1)}{|(1,-2,1)|^2}(1,-2,1) = \dfrac{1}{6} \cdot (x-2y+z,\ -2x+4y-2z,\ x-2y+z)$, így a síkra vett vetülete $(x,y,z) - \frac{1}{6}(x-2y+z,\ -2x+4y-2z,\ x-2y+z) = (\frac{1}{6}(5x+2y-z,\ 2x+2y+2z,\ -x+2y+5z)$, és a vetítés standard mátrixa $\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$.

g) A standard $\{\, E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22} \,\}$ bázis elemein való hatás: $E_{11} \mapsto E_{11}$, $E_{12} \mapsto E_{21}$, $E_{21} \mapsto E_{12}$, $E_{22} \mapsto E_{22}$, így a standard mátrix $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

3. *Adjunk meg olyan f lineáris transzformációt az $\mathbb{R}^3$ vektortéren, amelyre*
a) $0 \neq \operatorname{Ker} f \subseteq \operatorname{Im} f$*;*
b) $\operatorname{Ker} f$ *1 dimenziós, és* $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{\mathbf{0}\}$*;*
c) $\operatorname{Im} f$ *2 dimenziós, és f az* $\operatorname{Im} f$ *minden vektorát önmagába viszi;*
d) $f^3 = 0$*, de* $f^2 \neq 0$ *(ahol a szorzás a kompozíciót jelenti).*

Megoldás: Mindegyik transzformációt elég az $\mathbb{R}^3$ egy $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1,\ \mathbf{b}_2,\ \mathbf{b}_3\}$ bázisán megadni.
a) A dimenziótétel szerint $\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = 3$, és $1 \leq \dim \operatorname{Ker} f \leq \dim \operatorname{Im} f$, így $\dim \operatorname{Ker} f = 1$, és $\dim \operatorname{Im} f = 2$. Ez megvalósítható a báziselemeken $\mathbf{b}_1 \mapsto \mathbf{0}$, $\mathbf{b}_2 \mapsto \mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_3 \mapsto \mathbf{b}_3$ által megadott leképezéssel.
b) Legyen $\mathbf{b}_1 \mapsto \mathbf{0}$, $\mathbf{b}_2 \mapsto \mathbf{b}_2$, és $\mathbf{b}_3 \mapsto \mathbf{b}_3$. Mivel a képtér a $\mathbf{b}_2$ és $\mathbf{b}_3$ által generált 2-dimenziós altér, a mag csak 1-dimenziós lehet, és tartalmazza $\mathbf{b}_1$-et, tehát a mag a $\mathbf{b}_1$ által generált altér.
c) A b)-ben megadott leképezés erre is jó.
d) $\mathbf{b}_1 \mapsto \mathbf{b}_2 \mapsto \mathbf{b}_3 \mapsto \mathbf{0}$

4. *Írjuk fel az* $f : (x, y, z) \longmapsto (x + y - 2z, x + z, 2x + y - z, -x - z)$ *leképezés standard mátrixát! Adjuk meg a mátrix nullterének (azaz a leképezés magterének), a oszlopterének (azaz a leképezés képterének) és sorterének egy-egy bázisát!*

Megoldás: A mátrix és annak elemei sorműveletekkel kapott redukált lépcsős alakja:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \mapsto \mapsto \mapsto L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ebből a nulltér, azaz a homogén egyenletrendszer megoldástere a $t \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ alakú mátrixokból áll, tehát bázisa $\{[-1 \quad 3 \quad 1]^T\}$, oszlopterének bázisát az A azon oszlopai alkotják, amelyek az L vezéregyest tartalmazó oszlopai helyén állnak: $\{[1 \quad 1 \quad 2 \quad -1]^T, [1 \quad 0 \quad 1 \quad 0]^T\}$, sorterének pedig bázisát adják az L nemnulla sorvektorai: $\{[1 \quad 0 \quad 1], [0 \quad 1 \quad -3]\}$.

5. *Bizonyítsuk be, hogy*
a) $\operatorname{rang}(AB) \leq \min\{\operatorname{rang} A, \operatorname{rang} B\}$*, ahol* $A \in K^{k \times m}$ *és* $B \in K^{m \times n}$*;*
b) $|\operatorname{rang} A - \operatorname{rang} B| \leq \operatorname{rang}(A + B) \leq \operatorname{rang} A + \operatorname{rang} B$*, ahol* $A, B \in K^{m \times n}$*.*
(Útmutatás: Lássuk be, hogy a mátrixokat természetes módon lineáris leképezéseknek tekintve $\operatorname{Im} AB \leq \operatorname{Im} A$*,* $\operatorname{Ker} AB \geq \operatorname{Ker} B$ *és* $\operatorname{Im}(A + B) \leq \langle \operatorname{Im} A,\ \operatorname{Im} B \rangle$*.)*

Megoldás: Jelöljük A-val és B-vel az A-hoz, illetve B-hez tartalmazó természetes lineáris leképezést is: $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$, illetve $\mathbf{x} \mapsto B\mathbf{x}$.
a) $(AB)\mathbf{x} = A(B\mathbf{x}) \in \operatorname{Im} A$, tehát $\operatorname{Im} AB \leq ImA$, és ebből $\operatorname{rang} AB \leq \operatorname{rang} A$. Másrészt ha $B\mathbf{x} = \mathbf{0}$, akkor $(AB)\mathbf{x} = A\mathbf{0} = \mathbf{0}$, tehát $\operatorname{Ker} B \leq \operatorname{Ker} AB$, amiből $\operatorname{rang} AB \leq \operatorname{rang} B$. A kettőt összerakva kapjuk az állítást.
b) $\{(A + B)\mathbf{x} \,|\, \mathbf{x} \in K^n\} = \{A\mathbf{x} + B\mathbf{x} \,|\, \mathbf{x} \in K^n\} \leq \operatorname{Im} A + \operatorname{Im} B$. Általában $U, W \leq V$ alterekre $\dim(U + W) \leq \dim U + \dim V$, mert U és W egy-egy bázisának uniója $U + W$-nek generátorrendszere, és ebből kiválasztható bázis. Tehát itt $\operatorname{rang}(A+B) \leq \operatorname{rang} A + \operatorname{rang} B$. Ha ezt $A+B$-re és $-B$-re alkalmazzuk, akkor azt kapjuk, hogy $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang}((A+B)+(-B)) \leq \operatorname{rang}(A + B) + \operatorname{rang}(-B) = \operatorname{rang}(A + B) + \operatorname{rang} B$, amiből $\operatorname{rang}(A + B) \geq \operatorname{rang} A - \operatorname{rang} B$, és hasonlóan $\operatorname{rang}(A + B) \geq \operatorname{rang} B - \operatorname{rang} A$. A kettőből együtt kapjuk, hogy $\operatorname{rang}(A + B) \geq |\operatorname{rang} A - \operatorname{rang} B|$.

6. *Lássuk be, hogy ha* $A \in K^{m \times n}$*, továbbá* $B \in K^{m \times m}$ *és* $C \in K^{n \times n}$ *invertálható mátrixok, akkor* $\operatorname{rang} BA = \operatorname{rang} AC = \operatorname{rang} A$*.*

Megoldás: Az 5.a) feladatból $\operatorname{rang} BA \leq \operatorname{rang} A$, és $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang}(AB)B^{-1} \leq \operatorname{rang} AB$, így $\operatorname{rang} BA = \operatorname{rang} A$, és hasonlóan $\operatorname{rang} AC = \operatorname{rang} A$.

7. *Mutassuk meg, hogy minden $A \in K^{m\times n}$ r rangú mátrixhoz van olyan invertálható $P \in K^{n\times n}$ és $Q \in K^{m\times m}$ mátrix, amire a $B = Q^{-1}AP$ mátrixban $b_{11} = \ldots = b_{rr} = 1$, és minden más elem 0.*

Megoldás: 1. változat: Az A mátrixot elemi sorműveletekkel redukált lépcsős alakra hozhatjuk (minden elemi sorművelet egy-egy invertálható mátrixszal való szorzás balról, tehát összességében is egy invertálható mátrixszal szorzunk, és ennek a mátrixnak az inverze lehet Q). Ezután elemi oszlopműveleteket végzünk: a vezéregyeseket tartalmazó oszlopokat előre hozzuk, majd a többi oszlopot ezekkel kinullázzuk. Minden elemi oszlopművelet egy-egy invertálható mátrixszal való jobbszorzás, így összességében is egy invertálható mátrixszal (legyen ez P) szoroztunk jobbról, és eredményül a kívánt mátrixot kaptuk.

2. változat: Az állítás ekvivalens azzal, hogy a mátrixot alkalmas bázispárban felírva a kívánt mátrixot kapjuk. Legyen $\mathcal{B}_2$ a $\operatorname{Ker} A$ egy bázisa, és $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ a K^n egy bázisa, továbbá $\mathcal{C}_1 = \{\, A\mathbf{x} \,|\, \mathbf{x} \in \mathcal{B}_1 \,\}$, és $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ bázisa K^m-nek. Azt kell csak belátni, hogy $\mathcal{C}_1$ független rendszer. Valóban, ha $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i A\mathbf{b}_i = \mathbf{0}$ (ahol $\mathcal{B}_1 = \{\, \mathbf{b}_i \,|\, i = 1, \ldots, r \,\}$), akkor $A(\sum_{i=1}^{r} \lambda_i \mathbf{b}_i) = \mathbf{0}$, azaz $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i \mathbf{b}_i \in \operatorname{Ker} A$, de $\operatorname{Ker} A$ bázisa ($\mathcal{B}_2$) független $\mathcal{B}_1$-től, így ebből $\lambda_i = 0$ következik $i = 1, \ldots, r$-re.

8. *Legyen f lineáris transzformáció egy 6 dimenziós vektortéren. Lehet-e az f, f^2, f^3, f^4 leképezések rangja a következő sorozat?*

a) $3, 4, 2, 2$ *b)* $6, 5, 4, 3$ *c)* $5, 4, 4, 4$ *d)* $5, 3, 2, 1$ *e)* $3, 2, 1, 0$

Megoldás: Vegyük észre először, hogy $\operatorname{Im} id \geq \operatorname{Im} f \geq \operatorname{Im} f^2 \geq \operatorname{Im} f^3 \geq \cdots$, tehát az $r_i = \operatorname{rang} f_i$ jelölést használva ($r_0 = \operatorname{rang} id = \dim V$-vel kiegészítve),

$$r_0 \geq r_1 \geq r_2 \geq \cdots \tag{$*$}$$

igaz minden $f : V \to V$ lineáris transzformációra. Továbbá $\operatorname{Im} f^n = \{\, f^n(\mathbf{v}) \,|\, \mathbf{v} \in V \,\} = \{\, f(f^{n-1}(\mathbf{v})) \,|\, \mathbf{v} \in V \,\} = \operatorname{Im} f|_{\operatorname{Im} f^{n-1}}$, ahol $f|_U$ az f-nek az U altérre való megszorítását jelenti: $f_U : U \to V$, amely az U elemein ugyanúgy hat, mint f. A dimenziótételből következik, hogy $r_n = \dim \operatorname{Im} f|_{\operatorname{Im} f^{n-1}} = r_{n-1} - \dim \operatorname{Ker} f|_{\operatorname{Im} f^{n-1}}$, vagyis $r_n - r_{n-1} = \dim \operatorname{Ker} f|_{\operatorname{Im} f^{n-1}} = \dim(\operatorname{Ker} f) \cap \operatorname{Im} f|_{\operatorname{Im} f^{n-1}}$. Mivel az utóbbiak is csökkenő sorozatot alkotnak, azt kapjuk, hogy

$$r_0 - r_1 \geq r_1 - r_0 \geq r_2 - r_1 \geq \cdots \tag{$**$}$$

. ($*$) miatt nem lehetséges az a) rangsorozat, ($**$) miatt pedig a b) és d). Viszont minden olyan rangsorozat, amely a ($*$) és ($**$) feltételt kielégíti, megvalósítható (például a Jordan-blokkok meghatározásánál a 0-blokkok számát és méretét megválaszthatjuk a rangkülönbségeknek megfelelően: a (**) sorozat különbségei adják meg, hogy hány 1×1-es, 2×2-es, stb. 0-blokk van a Jordan-normálalakban). Báziselemeken megadhatunk a másik két rangsorozatnak megfelelő transzformációkat:

c) $\mathbf{b}_1 \mapsto \mathbf{b}_2 \mapsto \mathbf{0}$, $\mathbf{b}_i \mapsto \mathbf{b}_i$, ha $i = 3, 4, 5, 6$.

e) $\mathbf{b}_1 \mapsto \mathbf{0}$, $\mathbf{b}_2 \mapsto \mathbf{0}$, $\mathbf{b}_3 \mapsto \mathbf{b}_4 \mapsto \mathbf{b}_5 \mapsto \mathbf{b}_6 \mapsto \mathbf{0}$.

9. *Mutassuk meg, hogy bármely 3×3-as valós mátrixnak van valós sajátvektora.*

Megoldás: A karakterisztikus polinomja valós harmadfokú polinom, és annai mindig van valós gyöke (pl. mert $-\infty$-ben $-\infty$-hez, $+\infty$-ben pedig $+\infty$-hez tart). Tehát van valós sajátértéke a mátrixnak, és ahhoz valós sajátvektora is.

10. *Bizonyítsuk be, hogy A minden sajátvektora sajátvektora A^2-nek is. Igaz-e az állítás megfordítása?*

Megoldás: Ha $\mathbf{v}$ egy λ sajátértékhez tartozó sajátvektor, akkor $A^2\mathbf{v} = A(A\mathbf{v}) = A(\lambda\mathbf{v}) = \lambda A\mathbf{v} = \lambda^2\mathbf{v}$. Fordítva általában nem igaz, például a sík origo körüli $90°$-os forgatásának nincs valós sajátvektora, a négyzetének, a középpontos tükrözésnek viszont minden nem nulla vektor sajátvektora.

11. *Melyek azok az $n\times n$-es valós mátrixok, amelyeknek $\mathbb{R}^n$ minden $\mathbf{0}$-tól különböző vektora sajátvektora?*

Megoldás: Csak a λI skalármátrixok. Ugyanis ha A-nak lenne két különböző, λ és μ sajátértékhez tartozó $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ sajátvektora, akkor ezek függetlenek is lennének (ha egyik skalárszorosa a másiknak, akkor a hozzájuk tartozó sajátérték is ugyanaz). Viszont a feltétel szerint $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ is sajátvektor: $A(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \nu\mathbf{u}+\nu\mathbf{v}$. Másrészt $A(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = A\mathbf{u}+A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{u}+\mu\mathbf{v}$, tehát $\nu\mathbf{u}+\nu\mathbf{v} = \lambda\mathbf{u}+\mu\mathbf{v}$, azaz $(\nu-\lambda)\mathbf{u}+(\nu-\mu)\mathbf{v} = \mathbf{0}$, és akkor a függetlenség miatt $\nu-\lambda = \nu-\mu = 0$, vagyis $\lambda = \nu = \mu$, ellentmondva a feltevésnek.

12. *Határozzuk meg a 2. feladatban szereplő lineáris transzformációk sajátértékeit és sajátvektorait!*

Megoldás: a) Valós sajátvektorai csak a z tengellyel párhuzamos nemnulla vektorok, a hozzájuk tartozó sajátérték 1.

b) A mátrixról könnyen leolvasható, hogy a sajátértékei $1, 2, 3$, a hozzájuk tartozó sajátvektorok pedig a báziselemek nemnulla skalárszorosai: a, bx, illetve cx^2 alakú polinomok ($a, b, c \neq 0$).

c) A karakterisztikus polinom $|A - xI| = x^2 + 2x + 1$, amelynek egyetlen (de kétszeres) gyöke a -1. A -1-hez tartozó sajátvektorok az $(A+I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$ egyenlet megoldásai: $t\cdot\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$, ahol $t \neq 0$.

d) A 2.d) megoldásában szereplő A mátrixra $|A-xI| = -x(x-1)(x+1)$, így a sajátértékei $0, -1, 1$, és a hozzá tartozó sajátvektorok kiszámíthatók egy-egy egyenletrendszer megoldásával: $t\cdot\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}$, $t\cdot\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$, illetve $t\cdot\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}$.

e) Ez nem lineáris transzformáció, mert különböző (dimenziós) terek között megy.

f) A geometriai jelentéséből látható, hogy sajátvektorai a sík nemnulla vektorai 1 sajátértékkel (tehát a sík 2-dimenziós sajátaltér), illetve a sík normálvektorai (az $\begin{bmatrix}1 & -2 & 1\end{bmatrix}^T$ vektor nemnulla skalárszorosai, 0 sajátértékkel.

g) A nemnulla szimmetrikus ($\begin{bmatrix}a & b\\b & d\end{bmatrix}$ alakú) mátrixok 1 sajátértékkel, a nemnulla ferdén szimmetrikus ($\begin{bmatrix}0 & b\\-b & 0\end{bmatrix}$ alakú) mátrixok -1 sajátértékkel sajátvektorai. A ±1-en kívül nem lehet más valós sajátérték, mert $|A^T| = |A|$. (Mellesleg azért sem, mert a sajátalterek függetlenek, tehát a dimenziójuk összege legföljebb a teljes tér dimenziója, azaz 4.

13. *Melyik c egész számokra nincs olyan $f(x)$ egész együtthatós polinom, amelyre $f(1) = 0$, $f(2) = 2$ és $f(0) = c$?*

Megoldás: Számítsuk ki az interpoláló polinomot $\mathbb{Q}$ fölött! Az $f(1) = 0$ feltételhez $p_1(x) \equiv 0$. Emellett az $f(2) = 2$ feltételhez $p_2(x) = 0 + (x-1)a$ alakú, ahol $2 = p_2(2) = a$, tehát $a = 2$ és $p_2(x) = 2x - 2$. Végül a harmadik feltételt is hozzávéve $p_3(x) = 2x - 2 + b(x-1)(x-2)$ alakú, és $c = p_3(0) = -2+2b$, így $b = \frac{c}{2}+1$, és $p_3(x) = 2x-2+(\frac{c}{2}+1)(x-1)(x-2) = (\frac{c}{2}+1)x^2+(-1-\frac{3c}{2})x+c$, ami egész együtthatós, ha c páros. Viszont ha c páratlan, akkor a második és a harmadik feltétel ellentmond egymásnak: a 2-t és 0-t behelyettesítve a polinom értéke ugyanazt a 2 szerinti maradékot kellene, hogy adja (másképp: az egész együtthatós polinomot tekinthetjük $\mathbb{F}_2$ fölötti polinomnak). Tehát pontosan a páratlan c számokra nincs ilyen egész együtthatós polinom (magasabb fokú sem!).