1. *Van-e olyan 3×3-as mátrix $\mathbb{Q}$ fölött, amelynek minimálpolinomja*

a) $x^2 - 2$;

b) $x^2 + x$?

Megoldás: a) Ha $m_A(x) = x^2 - 2 = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$, akkor A-nak csak $\sqrt{2}$ és $-\sqrt{2}$ a sajátértékei. De akkor $k_A(x)$ is olyan többszöröse $m(x)$-nek, ami csak ezeket a gyöktényezőket tartalmazza. Tehát $k_A(x) = -(x^2 - 2)(x - \sqrt{2})$ vagy $k_A(x) = -(x^2 - 2)(x + \sqrt{2})$, de egyik sem $\mathbb{Q}[x]$-beli. Tehát nincs ilyen mátrix.

b) Mivel $m_A(x) = x^2 + x = x(x + 1)$, a sajátértékek 0 és -1, és mivel $m_A(x)$-ben mindegyik csak egyszeres gyök, az A mátrix diagonalizálható. A feltételt nyilván ki is elégíti minden olyan 3×3-as diagonális mátrix, amelynek az átlójában 0-k és -1-ek vannak, illetve ennek tetszőleges konjugáltja. Sőt, láthatjuk, hogy hasonlóság erejéig két ilyen mátrix van: amelynek diagonális alakjában $0, -1, -1$, illetve $0, 0, -1$ áll az átlóban.

2. *Tegyük föl, hogy egy $\mathbb{C}$ fölötti A mátrixra teljesül az $A^m = I$ egyenlőség valamilyen $m \geq 1$ esetén. Igazoljuk, hogy A diagonalizálható!*

Megoldás: Mivel A kielégíti az $x^m - 1$ polinomot, minimálpolinomja osztója ennek. Viszont $x^m - 1$-nek $\mathbb{C}$-ben m különböző gyöke van (az m komplex m-edik egységgyök), így a minimálpolinomnak sincs többszörös gyöke. Ezért A diagonalizálható.

3. *Milyen kapcsolat van AB és BA minimálpolinomjai között, ha A és B négyzetes mátrixok? Lássuk be, hogy AB és BA sajátértékei megegyeznek!*

Megoldás: Tegyük fel, hogy AB minimálpolinomja $g(x) = a_k x^k + \ldots + a_1 x + a_0$, BA minimálpolinomja pedig $g(x) = b_m x^k + \ldots + b_1 x + b_0$. Ekkor $0 = a_k(AB)^k + \ldots + a_1(AB) + a_0 I$-t balról B-vel, jobbról A-val megszorozva azt kapjuk, hogy $0 = a_k(BA)^{k+1} + \ldots + a_1(BA)^2 + a_0 BA$, tehát BA gyöke $xf(x)$-nek, és ezért $g(x)$ osztója $xf(x)$-nek. Ugyanígy $f(x)$ osztója $xg(x)$-nek. Tehát $g(x)$ minden nem nulla gyöke gyöke $f(x)$-nek, és viszont. Ha viszont $f(x)$-nek gyöke a 0, akkor AB nem invertálható, azaz $0 = |AB| = |A| \cdot |B|$, és ebből $|BA| = |B| \cdot |A| = 0$, tehát BA sem invertálható, és így 0 a $g(x)$-nek is gyöke. Ezzel beláttuk, hogy AB-nek és BA-nak ugyanazok a sajátértékeik. Az invertálható esetben a két oszthatósági feltétel nyilván azt adja, hogy a két minimálpolinom megegyezik. Amikor AB és BA nem invertálhatók, és mondjuk, $f(x) = x^s h(x)$, ahol $s > 0$, és $h(0) \neq 0$, és a második oszthatósági feltétel miatt $xg(x) = x^s h(x)k(x)$ valamely $k(x)$ polinomra, tehát $g(x) = x^{s-1}h(x)k(x)$. De $g(x)$ osztója $xf(x)$-nek, ezért $k(x) = 1$, x vagy x^2. Összefoglalva: ebben az esetben $f(x)$ és $g(x)$ legföljebb egy x-es szorzóban különbözik.

4. *Melyik mátrixok diagonalizálhatók $\mathbb{C}$ fölött a következők közül? Mi a Jordan-normálalakja azoknak, amelyek nem diagonalizálhatók?*

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Megoldás: Az A mátrix karakterisztikus polinomja $-x^3 + 3x^2 - 6x = -x(x - \frac{3}{2} - i\frac{3\sqrt{3}}{2})(x - \frac{3}{2} + i\frac{3\sqrt{3}}{2})$. A diagonalizálható, mert három különböző sajátértéke van.

B karakterisztikus polinomja $-x^3 + 3x - 2 = -(x-1)^2(x+2)$, tehát sajátértékei 1 és -2. Az 1-hez tartozó sajátaltér a $(B - I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ egyenlet megoldástere, ami csak 1-dimenziós, tehát B Jordan-normálalakjának egy 1-blokkja (2×2-es) és egy -2-blokkja van, és így B nem diagonalizálható.

Mivel C háromszögmátrix, számolás nélkül is leolvasható, hogy sajátértékei az átlós elemei: $1, 2, 3$ és 4. Mivel 4 különböző sajátértéke van a 4×4-es mátrixnak, C szükségképpen diagonalizálható.

D karakterisztikus polinomja x^4, tehát 0 az egyetlen sajátértéke, és D Jordan-normálalakja csak 0-hoz tartozó Jordan-blokkokból áll. D rangja 2, tehát a 0-hoz tartozó sajátaltér $4 - 2 = 2$ dimenziós, ezért D Jordan-alakjának két Jordan-blokkja van. $D^2 = 0$, tehát a legnagyobb Jordan-blokk 2×2-es, így a Jordan-normálalak két $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ blokkból álló blokkdiagonális mátrix.

5. *Hány olyan nem hasonló komplex mátrix van, amely kielégíti az alábbi feltételeket? Írjuk fel a lehetséges mátrixok Jordan-féle normálalakját!*

a) $k(x) = -x^5(x+1)^2, \quad m(x) = x^3(x+1)$;

b) $k(x) = (x-1)^4 x$, *és az* 1*-hez tartozó sajátaltér* 2*-dimenziós.*

Megoldás: a) A karakterisztikus polinomból tudjuk, hogy a Jordan-normálalak 0- és -1-blokkokból áll, az előbbiek összmérete 5, az utóbbiaké 2. A minimálpolinomból kiderül, hogy a legnagyobb 0-blokk mérete 3, a legnagyobb -1-blokké pedig 1. Tehát két lehetőség van: a Jordan-normálalak diagonális blokkjai:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, [0], [0], [-1], [-1] \qquad \text{vagy} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, [-1] \; [-1]$$

b) A karakterisztikus polinom alapján a mátrix Jordan-normálalakjában 1-blokkok és 0-blokkok lehetnek, 0-blokkból csak egy 1×1-es. Az 1-blokkok összmérete 4, és a sajátaltér dimenziója alapján az 1-blokkok száma 2. Tehát két lehetőség van:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, [1], [0] \qquad \text{vagy} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, [0]$$

6. *Adjunk meg két olyan* 7×7*-es mátrixot, amelyeknek a minimálpolinomja és a karakterisztikus polinomja is ugyanaz, sőt minden sajátaltere is ugyanannyi dimenziós, de a két mátrix nem hasonló!*

Megoldás: Ilyen például az a két Jordan-mátrix, amelynek diagonális blokkjai

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, [0], \qquad \text{illetve} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

7. *Számítsuk ki az alábbi mátrixok* n*-edik hatványát a diagonális, illetve a Jordan-féle normálalak segítségével!*

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Megoldás: $|A - xI| = x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$, így A sajátértékei 2 és -1. A 2-höz tartozó sajátvektorok a $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ skalárszorosai, a -1-hez tartozók az $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ skalárszorosai. Tehát a $P = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ áttérés-mátrixszal $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = D$. Ebből $A^n = (PDP^{-1})^n = PD^nP^{-1} =$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^{n+1} - (-1)^n & -2^{n+1} + 2 \cdot (-1)^n \\ 2^n - (-1)^n & -2^n + 2 \cdot (-1)^n \end{bmatrix}$$

$|B - xI| = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$, így B-nek csak a 2 a sajátértéke. Mivel $B - 2I$ rangja 1, a 2-höz tartozó sajátaltér dimenziója $2 - 1 = 1$, tehát B Jordan-normálalakja egyetlen Jordan-blokkból áll: $P^{-1}BP = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ alkalmas P mátrixszal. Ezt a P mátrixot kell megtalálni. Ezzel a P-vel $P^{-1}(B - 2I)P = P^{-1}BP - 2P^{-1}IP = P^{-1}BP - 2I = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Tehát P meghatározásához az $\mathbb{R}^2$-ben olyan $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ bázist kell találni, amelyre a $B - 2I = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ hatása $\mathbf{b}_1 \mapsto \mathbf{b}_2 \mapsto \mathbf{0}$. $\mathbf{b}_2$ a $\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0}$ tetszőleges nem triviális megoldása lehet: $\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b}_1$ pedig a $\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ egy megoldása: $\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Így a $\mathbf{b}_1$-ből és $\mathbf{b}_2$-ből mint oszlopokból összerakott $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$-re

$P^{-1}BP = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = J$, és $B^n = PJ^nP^{-1}$. A Jordan-blokk hatványa $J^n = \begin{bmatrix} 2^n & 0 \\ n \cdot 2^{n-1} & 2^n \end{bmatrix}$, és ebből $A^n = \begin{bmatrix} (n+1) \cdot 2^n & -n \cdot 2^{n+1} \\ n \cdot 2^{n-1} & (1-n) \cdot 2^n \end{bmatrix}$.

8. *Bizonyítsuk be, hogy minden $n \times n$-es komplex mátrix hasonló a transzponáltjához! (Használjuk a Jordan-normálalakot!)*

Megoldás: Először belátjuk, hogy az állítás igaz Jordan-blokkokra. Ha $J_{n\times n}$ egy 0-hoz tartozó Jordan-blokk, akkor az $\mathbf{x} \mapsto J\mathbf{x}$ transzformáció az $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ bázisvektorokon a $\mathbf{e}_1 \mapsto \mathbf{e}_2 \mapsto \cdots \mapsto \mathbf{e}_n \mapsto \mathbf{0}$ leképezésekkel hat. Ha egy $\mathcal{B} = \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$ bázisban ugyanezek a vektorok vannak, csak fordított sorrendben, akkor $\mathbf{b}_n \mapsto \cdots \mapsto \mathbf{b}_2 \mapsto \mathbf{b}_1 \mapsto \mathbf{0}$, tehát ebben a bázisban felírva J-t éppen J^T-at kapjuk.

Egy λ-hoz tartozó Jordan-blokkra $J - \lambda I$ hasonló $(J - \lambda I)^T$-hoz az előbbiek miatt. Ha P az áttérés mátrixa, akkor $P^{-1}JP - \lambda I = P^{-1}(J - \lambda I)P = (J - \lambda I)^T = J^T - \lambda I$, tehát $P^{-1}JP = J^T$, azaz J hasonló J^T-hoz.

Ha két blokkdiagonális mátrix megfelelő blokkjai hasonlóak, akkor a két nagy mátrix is hasonló (az áttérés mátrixa az a blokkdiagonális mátrix, amelynek átlós blokkjai az egyes blokkokra megadott áttérésmátrixok). Tehát minden Jordan-mátrix hasonló a transzponáltjához.

Végül, ha két mátrix hasonló: $B = P^{-1}AP$, akkor a transzponáltjaik is hasonlók: $B^T = P^TA^T(P^T)^{-1}$. Így egy A mátrixra és J Jordan-normálalakjára $A \sim J \sim J^T \sim A^T$, tehát az A mátrix hasonló a transzponáltjához.

9. *Van-e olyan $I \neq A \in \mathbb{Q}^{n\times n}$ mátrix, amelyre a) $A^3 = I$; b) $A^5 = I$? És $\mathbb{Q}^{2\times 2}$-ben?*

Megoldás: a) Az 3×3-as mátrix, ami az $\mathbf{e}_1 \mapsto \mathbf{e}_2 \mapsto \mathbf{e}_3 \mapsto \mathbf{e}_1$ leképezést valósítja meg, nyilván kielégíti a feltételeket. Ha 2×2-es mátrixot keresünk, annak a minimálpolinomja osztója az $x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$ polinomnak (ugyanis A gyöke ennek e polinomnak), és a minimálpolinom legföljebb másodfokú, tehát x^2+x+1-gyel lehet egyenlő, és akkor a foka miatt csak ez lehet a karakterisztikus polinom is. Ilyen mátrixot könnyű gyártani, pl. $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

b) 5×5-öset az előzőhöz hasonló módon tudunk gyártani, az $\mathbf{e}_1 \mapsto \mathbf{e}_2 \mapsto \cdots \mapsto \mathbf{e}_5 \mapsto \mathbf{e}_1$ leképezéshez. Ha lenne ilyen 2×2-es mátrix is, annak a minimálpolinomja osztója az $x^5 - 1 = (x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$-nek, és legföljebb másodfokú. De a negyedfokú faktort nem lehet $\mathbb{Q}$ fölött tovább bontani (valós fölött is csak az $(x^2 - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}x + 1)(x^2 - \frac{-1-\sqrt{5}}{2}x + 1)$ felbontása van), tehát csak $x - 1$ lehetne a minimálpolinom, de az azt jelentené, hogy $A = I$.

10. *Bizonyítsuk be, hogy ha $m_A(x) = f(x)g(x)$, ahol $f(x)$ és $g(x)$ relatív prímek, akkor* $\operatorname{Im} f(A) = \operatorname{Ker} g(A)$.

Megoldás: Ha $\mathbf{v} \in \operatorname{Im} f(A)$, akkor $\mathbf{v} = f(A)\mathbf{w}$ valamely $\mathbf{w}$-re, és akkor $g(A)\mathbf{v} = g(A)f(A)\mathbf{w} = m_A(A)\mathbf{w} = 0\mathbf{w} = \mathbf{0}$, tehát $\mathbf{v} \in \operatorname{Ker} g(A)$.

Ha $\mathbf{v} \in \operatorname{Ker} g(A)$, akkor felhasználjuk azt a számelméleti tételt, hogy ha $f(x)$ és $g(X)$ relatív prímek, akkor van olyan $a(x),\ b(x) \in K[x]$, amelyre $1 = a(x)f(x) + b(x)g(x)$. Így $I = a(A)f(A) + b(A)g(A)$, és $\mathbf{v} = a(A)f(A)\mathbf{v} + b(A)g(A)\mathbf{v} = f(A)a(A)\mathbf{v} + b(A)\mathbf{0} = f(A)a(A)\mathbf{v} \in \operatorname{Im} f(A)$.