1. *A következő mátrixok közül melyik önadjungált, unitér, illetve normális? Az önadjungáltak milyen definitek?*

$$A=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&0&1\\1&1&1\end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix}0&2&-1\\-2&0&3\\1&-3&0\end{bmatrix}\qquad C=\begin{bmatrix}i&i\\i&-i\end{bmatrix}\qquad D=\begin{bmatrix}2&1\\3&2\end{bmatrix}$$

$$E=\begin{bmatrix}1&1&-1\\1&3&0\\-1&0&2\end{bmatrix}\qquad F=\begin{bmatrix}-1&2+i\\2-i&-5\end{bmatrix}\qquad G=\begin{bmatrix}1/3&-2/3&-2/3\\2/3&2/3&-1/3\\2/3&-1/3&2/3\end{bmatrix}\qquad H=\begin{bmatrix}1&i\\1+i&0\end{bmatrix}$$

Megoldás: A, E, F önadjungált, G unitér. $B^*=-B$, így $B^*B=BB^*$, azaz B normális. $C=i\begin{bmatrix}1&1\\1&-1\end{bmatrix}$ egy önadjungált (és ezért normális) mátrixnak a skalárszorosa, ezért maga is normális. (Ha M normális, akkor $(cM)^*(cM)=|c|^2M^*M=|c|^2MM^*=(cM)(cM)^*$.) D és H nem is normális, mert $D^*D\neq DD^*$ és $H^*H\neq HH^*$.

Az A, E, F mátrixokat Gram-mátrixként diagonalizálva (szimultán sor- és oszlopműveletekkel) megállapíthatjuk a jellegüket.

$$A=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&0&1\\1&1&1\end{bmatrix}\mapsto\begin{bmatrix}1&1&1\\0&-1&0\\0&0&0\end{bmatrix}\mapsto\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{bmatrix},\qquad\text{tehát } A \text{ indefinit.}$$

$$E=\begin{bmatrix}1&1&-1\\1&3&0\\-1&0&2\end{bmatrix}\mapsto\begin{bmatrix}1&1&-1\\0&2&1\\0&1&1\end{bmatrix}\mapsto\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&1\\0&1&1\end{bmatrix}\mapsto\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&1\\0&0&\frac12\end{bmatrix}\mapsto\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&\frac12\end{bmatrix},$$

tehát E pozitív definit.

$$F=\begin{bmatrix}-1&2+i\\2-i&-5\end{bmatrix}\mapsto\begin{bmatrix}-1&2+i\\0&0\end{bmatrix}\mapsto\begin{bmatrix}-1&0\\0&0\end{bmatrix},\qquad\text{tehát } F \text{ negatív szemidefinit.}$$

2. *Határozzuk meg az összes 2×2-es valós, ortogonális mátrixot! Milyen geometriai transzformációkat adnak a síkon ezek a mátrixok?*

Megoldás: Ezek azok a mátrixok, amelyek az **i**, **j** ortonormált bázis vektorait ortonormált vektorokba viszik. Ha az irányítás megmarad, origó körüli forgatásról, ha megfordul, origón átmenő egyenesre való tükrözésről van szó. Formálisan: $A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$-re $a^2+c^2=1$ miatt van olyan φ, hogy $a=\cos\varphi$ és $b=\sin\varphi$. Mivel $\begin{bmatrix}b\\d\end{bmatrix}$ merőleges $\begin{bmatrix}a\\c\end{bmatrix}$-re, $\begin{bmatrix}b\\d\end{bmatrix}$ csak $\begin{bmatrix}c\\-a\end{bmatrix}$ egy skalárszorosa lehet, és mivel a hosszuk is megegyezik, csak 1-szeres vagy -1-szeres: $A=\begin{bmatrix}a&c\\c&-a\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\varphi&\sin\varphi\\\sin\varphi&-\cos\varphi\end{bmatrix}$ origón átmenő, $\frac12\varphi$ szögű egyenesre való tükrözés, vagy $A=\begin{bmatrix}a&-c\\c&a\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\varphi&-\sin\varphi\\\sin\varphi&\cos\varphi\end{bmatrix}$ origó körüli, φ szögű forgatás.

3. *Bizonyítsuk be, hogy minden 1 determinánsú, 2×2-es valós normális mátrix szimmetrikus vagy ortogonális! Mutassunk példát arra, hogy ez az állítás 3×3-as mátrixokra nem igaz!*

Megoldás: $A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$-re $A^*A=\begin{bmatrix}a^2+c^2&ab+cd\\ab+cd&b^2+d^2\end{bmatrix}$ és $AA^*=\begin{bmatrix}a^2+b^2&ac+bd\\ac+bd&c^2+d^2\end{bmatrix}$. Ezek akkor egyenlők, ha $b^2=c^2$, és $ab+cd-ac-bd=(a-d)(b-c)=0$. Így vagy $b=c$, és akkor A szimmetrikus, vagy $b=-c\neq0$, és $a=d$: $A=\begin{bmatrix}a&b\\-b&a\end{bmatrix}$. Mivel $\det A=a^2+b^2=1$, a mátrix oszlopai ortonormált rendszert alkotnak, így ekkor A ortogonális.

3×3-as mátrixok körében ellenpélda a $B=\begin{bmatrix}0&2&0\\-2&0&0\\0&0&\frac14\end{bmatrix}$ blokkdiagonális mátrix, amelynek felső blokkja egy ortogonális skalárszorosa, az alsó pedig szimmetrikus, tehát mindkettő, és így B is

normális, továbbá $\det B = 1$. B nyilván nem szimmetrikus és nem is ortogonális (az oszlopvektorai merőlegesek ugyan, de nem 1 hosszúságúak).

4. *Adjunk példát olyan $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ transzformációra, amelynek minden sajátértéke 1 abszolút értékű, de a transzformáció nem unitér!*

Megoldás: Ilyen példa az $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ Jordan-mátrix vagy akár a diagonalizálható (de nem unitérrel diagonalizálható) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ mátrix.

5. *A Schur-felbontás bizonyítását követve, hozzuk unitérrel háromszög alakra az $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ mátrixot!*

Megoldás: Először egy sajátvektort tartalmazó ortonormált bázist kell választanunk. Az A mátrix karakterisztikus polinomja $-(x-2)(x-1)^2$, és a $\lambda = 1$ sajátértékhez tartozó vektorok a $[-1 \quad 0 \quad 2]^T$ vektor skalárszorosai, így az 1 hosszú $\mathbf{v}_1 = [-1/\sqrt{5} \quad 0 \quad 2/\sqrt{5}]^T$ is. Ezt kiegészíthetnénk ortonormált bázissá Gram–Schmidt-ortogonalizálással, de egyszerűbb egy tetszőleges, 1 hosszú merőleges $\mathbf{v}_2$ vektort választani, pl. $\mathbf{v}_2 = [0 \quad 1 \quad 0]^T$, és a kettő vektoriális szorzatából állítani elő a harmadik báziselemet: $\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_1 = [2/\sqrt{5} \quad 0 \quad 1/\sqrt{5}]^T$. $U = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{5} & 0 & 2/\sqrt{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2/\sqrt{5} & 0 & 1/\sqrt{5} \end{bmatrix}$-rel $U^*AU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & \sqrt{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, ami már felső háromszögmátrix, így nem kell tovább alakítani.

(Ha az U mátrix további oszlopait egy kicsit ügyetlenebbül választottuk volna, mondjuk az $U = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} & 0 \end{bmatrix}$-val konjugálunk először, akkor az $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{5} & 2 \end{bmatrix}$ mátrixhoz jutunk, aminek még a jobb alsó 2×2-es részmátrixát háromszög alakra kell hozni az eddigiekhez hasonló módon, például az $V_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ mátrixszal konjugálni, azaz az egész mátrixra az U után a $V = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & V_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ unitér mátrixszal való konjugálást is hattatjuk, és így kapunk diagonális alakot (összességében az UV unitér mátrixszal konjugálva).)

6. *Legyen a $V(a_1, \ldots, , a_n)$ Vandermonde-mátrix i. sora $[1 \quad a_1 \quad a_1^2 \quad \ldots \quad a_1^{n-1}]$ minden i-re. Bizonyítsuk be, hogy ennek a mátrixnak a determinánsa $\prod_{i>j}(a_i - a_j)$.*

Megoldás: n-re vonatkozó teljes indukcióval bizonyítjuk az állítást. $n = 2$-re $|V(a_1, a_2)| = \begin{vmatrix} 1 & a_1 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix} = a_2 - a_1$. Ha $n-1$-re már megvan, akkor $|V(a_1, \ldots, a_n)|$-re a következő átalakításokat végezzük: hátulról előre haladva a determináns minden oszlopából vonjuk ki az előző oszlop a_1-szeresét, ezután emeljünk ki $(a_i - a_1)$-et $i = 2, \ldots, n$-re az i. oszlopból, és fejtsük ki a kapott determinánst az 1. sor szerint (amelynek már csak az első eleme 1, a többi 0). Ekkor azt kapjuk, hogy $|V(a_1, \ldots, a_n)| = \prod_{i=2}^{n}(a_i - a_1)|V(a_2, \ldots, a_n)|$, és ez az indukciós feltevés miatt $\prod_{i=2}^{n}(a_i - a_1) \prod_{2 \le j < k \le n}(a_k - a_j) = \prod_{1 \le j < k \le n}(a_k - a_j)$.

7. *Írjuk fel az*

a) $\mathbb{R}^3$ tér $x - y + z = 0$ síkjára való merőleges vetítés és tükrözés, illetve

b) a $\mathbb{R}^4$ tér $(1, 0, 1, -1)$ és $(0, 1, 1, -1)$ vektorok által kifeszített alterére való merőleges vetítés mátrixát!

Megoldás: A sík merőleges kiegészítője az $[1\ \ -1\ \ 1]^T$ normálvektor által generált egydimenziós altér, amelynek ortonormált bázisát az $\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}[1\ \ -1\ \ 1]^T$ vektor alkotja. Így a merőleges vetítés és a tükrözés mátrixa

$$I - \mathbf{n}\mathbf{n}^* = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 & -1/3 \\ 1/3 & 2/3 & 1/3 \\ -1/3 & 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}, \qquad \text{illetve} \qquad I - 2\mathbf{n}\mathbf{n}^* = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 & -2/3 \\ 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ -2/3 & 2/3 & 1/3 \end{bmatrix}.$$

8. *Számítsuk ki az* $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ *és az* $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ *mátrixok pszeudoinverzét!*

Megoldás: $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ 2×3-as 2 rangú mátrix, így a pszeudoinverze (ami egyúttal a jobb inverze is)

$$B^+ = B^*(BB^*)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ 3×2-es 2 rangú mátrix, így a pszeudoinverze (ami egyúttal a bal inverze is)

$$C^+ = (C^*C)^{-1}C^* = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -1 & -5 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

9. *a) Adjuk meg az* $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 4}$ *mátrix pszeudoinverzét és egy 3 rangú általánosított inverzét!*

b) Bizonyítsuk be, hogy az $\{\, A' - A^+ \mid A' \text{az } A \text{ mátrix egy általánosított inverze} \,\}$ *halmaz altere a* $\mathbb{R}^{4\times 3}$ *vektortérnek! Hány dimenziós ez az altér?*

c) A pszeudoinverz felhasználásával határozzuk meg az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *egyenletrendszer legjobban közelítő megoldását* $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$*-re,* $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$*-re és* $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$*-ra.*

Megoldás: a) A pszeudoinverz kiszámításához bontsuk fel először az A mátrixot két teljes rangú mátrix szorzatára. A Gauss-módszerrel A-t redukált lépcsős alakra hozzuk:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ebből láthatjuk, hogy A rangja 2, és $A = BC$, ahol $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ az A 1. és 3. oszlopából álló 2 rangú mátrix (mivel a redukált lépcsős alak 1. és 3. oszlopában van vezéregyes), $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ pedig a redukált lépcsős alak nem nulla soraiból álló, szintén 2 rangú mátrix. Ezeknek a pszeudoinverze $B^+ = (B^*B)^{-1}B^* = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, illetve $C^+ = C^*(CC^*)^{-1} = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 5 & -2 \\ -2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$, és ebből

$$A^+ = C^+B^+ = \begin{bmatrix} 8 & -7 & 1 \\ 8 & -7 & 1 \\ -1 & 5 & 4 \\ 6 & 3 & 9 \end{bmatrix}$$

Az általánosított inverzek kiszámításához a SAP-módszert alkalmazzuk. A redukált lépcsős alakra hozásnál alkalmazott sorműveleteket az I_3-ra alkalmazva megkapjuk az S mátrixot:

$$\left[\begin{array}{rrrr|rrr} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{rrrr|rrr} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{rrrr|rrr} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

Ezután a mátrixot oszlopműveletekkel tovább alakítjuk, amíg $\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ alakú nem lesz, és az I_4-re alkalmazva ezeket az oszlopműveleteket, megkapjuk a P mátrixot, amivel $SAP = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ - & - & - & - \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ - & - & - & - \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ - & - & - & - \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ - & - & - & - \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Az A tetszőleges általánosított inverzét megkapjuk $P \begin{bmatrix} I_2 & X \\ Y & Z \end{bmatrix}_{4\times 3} S$ alakban, amelynek a rangja megegyezik a középső mátrix rangjával. Tehát egy 3 rangú általánosított inverz pl. a következő:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b) A^+ is egy általánosított inverz, így $P \begin{bmatrix} I_r & X_0 \\ Y_0 & Z_0 \end{bmatrix} S$ alakú, tehát a megadott halmaz az összes $P \begin{bmatrix} I_r & X \\ Y & Z \end{bmatrix} S - P \begin{bmatrix} I_r & X_0 \\ Y_0 & Z_0 \end{bmatrix} S = P \begin{bmatrix} 0 & X - X_0 \\ Y - Y_0 & Z - Z_0 \end{bmatrix} S$ alakú mátrixból áll. Mivel X, Y, Z tetszőleges, $X - X_0$, $Y - Y_0$ és $Z - Z_0$ is az. A $P \begin{bmatrix} 0 & U \\ V & W \end{bmatrix} S$ alakú mátrixoknak az összege és skalárszorosa is ilyen alakú (és a 0 mátrix is), tehát ezek alteret alkotnak $\mathbb{R}^{4\times 3}$-ban. Továbbá azok a mátrixok, amelyekben egyetlen egyes van az U, V vagy W elemei között, a mátrix többi eleme pedig 0, bázist alkotnak ebben a vektortérben (a függetlenséghez az is kell, hogy P és S is invertálható). Tehát ennek az altérnek a dimenziója $4 \cdot 3 - 2^2 = 8$.

c) A közelítő megoldás $A^+\mathbf{b}$, ami a három esetben $\frac{1}{11}[3 \quad 3 \quad 1 \quad 5]^T$, $\frac{1}{33}[23 \quad 23 \quad -7 \quad 9]^T$, illetve $\frac{1}{11}[-3 \quad -3 \quad 21 \quad 39]^T$. Ezek közül az első és a harmadik pontos megoldás, a középső hibája $2/\sqrt{3}$.

10. *Bizonyítsuk be, hogy ha A^+ az $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ mátrix pszeudoinverze, és $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ unitér, akkor $(AU)^+ = U^{-1}A^+$. Adjunk példát arra, hogy ha U nem unitér, csak invertálható, akkor $U^{-1}A^+$ nem feltétlenül lesz az AU pszeudoinverze.*

Megoldás: A pszeudoinverz négy tulajdonságát kell ellenőrizni.
$U^{-1}A^+AUU^{-1}A^+ = U^{-1}A^+AA^+ = U^{-1}A^+$,
$AUU^{-1}A^+AU = AA^+AU = AU$,
$AUU^{-1}A^+ = AA^+$ önadjungált, mert A^+ pszeudoinverze A-nak, és
$U^{-1}A^+AU$ is öndajungált, mert egy öndjungáltnak unitérrel vett konjugáltja.

A példa megkonstruálásához azt kell észrevennünk, hogy az előző bizonyításban csak az utolsó tulajdonságnál volt szükségünk arra, hogy U unitér. Vegyünk tehát egy olyan A mátrixot, amelyre A^+A nem skalármátrix, pl. legyen $A = [1 \quad 1]$, és erre $A^+ = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$, továbbá $A^+A =$

$\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$, és legyen $U = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ (tetszőleges nem túl szimmetrikus invertálható mátrixszal próbálkozhatunk). Ekkor $U^{-1}A^+AU = \begin{bmatrix} 3/2 & 3/2 \\ -1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$ nem öndjungált, tehát $(AU)^+ \neq U^{-1}A^+$.

11. *Mi lehet a rangja egy r rangú, $m \times n$-es mátrix általánosított inverzének? És a pszeudoinverzének?*

Megoldás: Mivel az általánosított inverzek $P \begin{bmatrix} I_r & X \\ Y & Z \end{bmatrix} S$ alakúak, ahol P és S invertálható, az általánosított inverz rangja megegyezik a középső mátrix rangjával, az pedig X, Y, Z tetszőleges választása miatt r és $min(m, n)$ között bármi lehet. A pszeudoinverz rangja viszont csak r lehet, mert $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang}(AA^+A) \leq \operatorname{rang} A^+$, és $\operatorname{rang} A^+ = \operatorname{rang}(A^+AA^+) \leq \operatorname{rang} A$, tehát $\operatorname{rang} A^+ = \operatorname{rang} A$.

12. *Bizonyítsuk be, hogy egy teljes rangú mátrix bármely általánosított inverze egyoldali inverz.*

Megoldás: Ha A teljes rangú, akkor van egyoldali inverze, mondjuk, $BA = I$. Ha A' az A valamely általánosított inverze, akkor $I = BA = B(AA'A) = (BA)A'A = IA'A = A'A$, tehát A' is bal oldali inverz. Ugyanígy jön ki jobb oldalira.