1. *Legyenek $B \in \mathbb{C}^{m\times r}$ és $C \in \mathbb{C}^{r\times n}$ r rangú mátrixok. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $A = BC$ is r rangú, és $A^+ = C^+B^+$.*

Megoldás: A feltételek miatt B-nek van balinverze, C-nek pedig jobbinverze. Ha egy B mátrixnak van balinverze, mondjuk, B', akkor B^+ is balinverz: a $BB^+B = B$ összefüggést balról B'-vel szorozva azt kapjuk, hogy $B^+B = I_r$. Ugyanígy C^+ jobbinverze C-nek: $CC^+ = I_r$. Ebből következik, hogy $r = \operatorname{rang} B \geq \operatorname{rang} BC \geq \operatorname{rang} B^+BCC^+ = \operatorname{rang} I_r = r$, tehát végig $=$ van, ezért $\operatorname{rang} BC = r$. Most lássuk be C^+B^+-ra az A pszeudoinverzét definiáló négy összefüggést!
$A(C^+B^+)A = BCC^+B^+BC = BI_rI_rC = BC$,
$C^+B^+AC^+B^+ = C^+B^+BCC^+B^+ = C^+I_rI_rB^+ = C^+B^+$,
$A(C^+B^+) = BCC^+B^+ = BB^+$ önadjungált és
$(C^+B^+)A = C^+B^+BC = C^+C$ is önadjungált.

2. *Adjuk meg a következő mátrixok SVD- és redukált SVD-felbontását!*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & -3 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & i \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -4 \end{bmatrix} \qquad E = \begin{bmatrix} 2 & -11 \\ 10 & -5 \end{bmatrix}$$

Megoldás: A szimmetrikus mátrix, sajátértékei 2 és 0, tehát A pozitív szemidefinit, és így az SVD-felbontása megegyezik a spektrálfelbontásával. Ehhez az A normált sajátvektorai: $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ a 2-höz, és $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ a 0-hoz. Tehát az $M = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, és $\Sigma' = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ mátrixokkal $A = M\Sigma'M^* = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. A redukált felbontás ($r = 1$-gyel) $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Érdemes B helyett B^* SVD-felbontását kiszámítani, és abból B-ét. $BB^* = \begin{bmatrix} 25 \end{bmatrix}$ egyetlen sajátértéke 25, tehát B^* egyetlen szinguláris értéke 5. $M = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$, $B^*M = B^* = \begin{bmatrix} 4/5 \\ -3/5 \end{bmatrix}$, és ezt unitér mátrixszá kiegészítve $M' = \begin{bmatrix} 4/5 & 3/5 \\ -3/5 & 4/5 \end{bmatrix}$, tehát $B^* = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/5 & 3/5 \\ -3/5 & 4/5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$. Ebből $B = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4/5 & -3/5 \\ 3/5 & 4/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4/5 & -3/5 \end{bmatrix}$ a B SVD-, illetve redukált SVD-felbontása.

$C^*C = \begin{bmatrix} -i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. Így C szinguláris értékei $\sqrt{2}$ és 1, $\Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\Sigma' = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. C^*C normált sajátvektorai a 2-höz és 1-hez $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, és ezek merőlegesek is, így $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. $CM = \begin{bmatrix} 0 & i \\ 1 & 0 \\ i & 0 \end{bmatrix}$, amelynek oszlopait normálva és kiegészítve ortonormált bázissá kapjuk az $M' = \begin{bmatrix} 0 & i & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ i/\sqrt{2} & 0 & -i/\sqrt{2} \end{bmatrix}$. Ezzel $C = M'\Sigma'M^* = \begin{bmatrix} 0 & i & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ i/\sqrt{2} & 0 & -i/\sqrt{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ a C SVD-felbontása és $C = \begin{bmatrix} 0 & i \\ 1/\sqrt{2} & 0 \\ i/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ a C redukált SVD-felbontása.

$D^*D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -10 \\ 0 & -10 & 20 \end{bmatrix}$ sajátértékei 25, 1 és 0, így D szinguláris értékei 5 és 1. A D^*D mátrix sajátértékeihez tartozó normált sajátvektorok ortonormált bázist alkotnak $\mathbb{C}^3$-ben, és ebből

$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{5} & 0 & 2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 0 & 1/\sqrt{5} \end{bmatrix}$. Ebből $DM = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\sqrt{5} & 0 & 0 \\ -2\sqrt{5} & 0 & 0 \end{bmatrix}$, és $M' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{5} & 0 & 2/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} & 0 & -1/\sqrt{5} \end{bmatrix}$.

A D mátrix SVD-felbontása: $D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{5} & 0 & 2/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} & 0 & -1/\sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{bmatrix}$, és a redukált SVD-felbontása: $D = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1/\sqrt{5} & 0 \\ -2/\sqrt{5} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

$E^*E = \begin{bmatrix} 104 & -72 \\ -72 & 146 \end{bmatrix}$ sajátértékei 200 és 50, normált sajátvektorai: $\begin{bmatrix} -3/5 \\ 4/5 \end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix} 4/5 \\ 3/5 \end{bmatrix}$. Ebből $M = \begin{bmatrix} -3/5 & 4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{bmatrix}$, $EM = \begin{bmatrix} -10 & -5 \\ -10 & 5 \end{bmatrix}$ és $M' = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$. Az E mátrix SVD-felbontása: $E = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 5\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3/5 & 4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{bmatrix}$, és ez egyúttal redukált SVD-felbontás is.

3. *A 2. feladat mátrixainak SVD- (vagy redukált SVD-) alakját felhasználva oldjuk meg a következő feladatokat!*

a) Írjuk fel D poláris felbontását!
b) Adjuk meg az $E\mathbf{x} = \mathbf{0}$ legjobb közelítő megoldását az egységkörön!
c) Határozzuk meg A pszeudoinverzét!
d) Adjuk meg a D-t legjobban közelítő 1 rangú mátrixot!

Megoldás: a) $D = (M'\Sigma'(M')^*)(M'M^*) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

b) Az M utolsó oszlopa: $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 4/5 \\ 3/5 \end{bmatrix}$. Erre $|E\mathbf{v}| = |[-5\ 5]^T| = 5\sqrt{2}$.

c) Az $A = U'\Sigma U^* = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} [2] [1/\sqrt{2} \quad 1/\sqrt{2}]$ felbontást használva $A^+ = U\Sigma^{-1}(U')^* = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} [1/2] [1/\sqrt{2} \quad 1/\sqrt{2}] = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 \end{bmatrix}$.

d) D (redukált) SVD-felbontásából: $D^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} \end{bmatrix} [5] [0 \quad -1/\sqrt{5} \quad 2/\sqrt{5}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -4 \end{bmatrix}$.

A közelítés hibája $||D - D^{(1)}|| = 1$.

4. *Adjuk meg az $A = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$ pozitív definit mátrix SVD-felbontását, és ennek segítségével adjunk meg olyan pozitív definit B mátrixot, amelyre $B^2 = A$*

Megoldás: A unitérrel diagonalizálható, és az ebből kapott felbontás az A SVD-felbontása, ha A pozitív szemidefinit (és ha a sajátértékeket fogyó sorrendben vettük).

$A = M\Sigma'M^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, és ebből

$B = M\sqrt{\Sigma'}M^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.

5. *Bizonyítsuk be, hogy ha U és V unitér, akkor $||UA|| = ||A|| = ||AV||$, feltéve, hogy az UA és AV szorzatok léteznek.*

Megoldás: Ha A oszlopai $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$, akkor UA oszlopai $U\mathbf{v}_1, \ldots, U\mathbf{v}_n$. Mivel U unitér, skalárszorzattartó, és így távolságtartó is (a vektor önmagával vett skalárszorzata a hosszának a négyzete), tehát UA oszlopainak hossza megegyezik az U megfelelő oszlopainak hosszával. Továbbá

egy mátrix normája az oszlopai hossza négyzetösszegének négyzetgyöke ($\sum_{i,j} |a_{ij}|^2 = \sum_j |v_j|^2$), így $||UA|| = ||A||$. A másik eset az elsőből következik, ugyanis $||AV|| = ||(AV)^*|| = ||V^*A^*|| = ||A^*|| = ||A||$.

6. *Legyen $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Igazoljuk, hogy minden 1 hosszúságú $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ vektorra $\sigma_n \le |A\mathbf{v}| \le \sigma_1$, ahol $\sigma_1 \ge \sigma_2 \ge \cdots$ az A szinguláris értékei (beleszámítva a 0-kat is).*

Megoldás: Legyen $A = M'\Sigma'M^*$ az A SVD-felbontása, ahol Σ' diagonális elemei $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$. Legyen $\mathbf{w} = M^*\mathbf{v}$, ami szintén 1 hosszúságú, mivel M^* unitér. Ekkor $|A\mathbf{v}| = |M'\Sigma'M^*\mathbf{v}| = |M'\Sigma'\mathbf{w}| = |\Sigma'\mathbf{w}| = \sqrt{\sum_i \sigma_i^2|w_i|^2} \le \sqrt{\sum_i \sigma_1^2|w_i|^2} = \sigma_1\sqrt{\sum_i |w_i|^2} = \sigma_1$, és ugyanígy

$|\Sigma'\mathbf{w}| = \sqrt{\sum_i \sigma_i^2|w_i|^2} \ge \sqrt{\sum_i \sigma_n^2|w_i|^2} = \sigma_n\sqrt{\sum_i |w_i|^2} = \sigma_n$.

7. *Legyen $A = M'\Sigma'M^* = U'\Sigma U^*$ az A SVD- és redukált SVD-felbontása. Lássuk be, hogy*

a) $|A(Me_n)| = \sigma_n$;

b) $||A - A^{(k)}|| = \sqrt{\sum_{i=k+1}^n \sigma_i^2}$;

c) $A^+ = U\Sigma^{-1}(U')^*$.

Megoldás: a) $|A(M\mathbf{e}_n)| = |M'\Sigma'M^*M\mathbf{e}_n| = |M'\Sigma'\mathbf{e}_n| = |M'\sigma_n\mathbf{e}_n| = \sigma_n|M'\mathbf{e}_n| = \sigma_n$, mert M' unitér, és $\mathbf{e}_n$ egységvektor.

b) $A^{(k)} = (M')^{(k)}(\Sigma')^{(k)}(M^{(k)})^* = M'(\Sigma')^{(k)}M^*$, ahol $(\Sigma')^{(k)}$-t úgy kapjuk a Σ'-ből, hogy a k. utáni diagonális elemei helyébe 0-t írunk. Így $||A - A^{(k)}|| = ||M'(\Sigma' - (\Sigma')^{(k)})M^*|| = ||\Sigma' - (\Sigma')^{(k)}|| = \sqrt{\sigma_{k+1}^2 + \ldots + \sigma_n^2}$

8. *Legyen $B = \begin{bmatrix} 0 & A \\ A^T & 0 \end{bmatrix}$ blokkmátrix, ahol $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Milyen összefüggés van A szinguláris értékei és B sajátértékei között?*

Megoldás: Használjuk A^T helyett az általánosabban érvényes A^* jelölést! Legyen $\lambda \ne 0$ sajátértéke B-nek. Ekkor van olyan $\begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix}$ vektor, amelyet a B λ-szorosába visz, másrészt a B-vel vett képe $\begin{bmatrix} A\mathbf{w} \\ A^*\mathbf{v} \end{bmatrix}$, tehát $A\mathbf{w} = \lambda\mathbf{v}$ és $A^*\mathbf{v} = \lambda\mathbf{w}$. Ebből $A^*A\mathbf{w} = A^*\lambda\mathbf{v} = \lambda^2\mathbf{w}$ (ahol $\mathbf{w} \ne 0$, mert ha az lenne, akkor $A\mathbf{w} = \lambda\mathbf{v}$ miatt a sajátvektor mindkét része $\mathbf{0}$ lenne), tehát $|\lambda|$ szinguláris érték (λ^2 egy pozitív szemidefinit mátrix sajátértéke, tehát nemnegatív valós szám, és így λ is valós).

Fordítva, ha σ szinguláris érték, és $A^*A\mathbf{v} = \sigma^2\mathbf{v}$, akkor $\mathbf{w} = \sigma^{-1}A\mathbf{v}$-re $A^*\mathbf{w} = \sigma^{-1}A^*A\mathbf{v} = \sigma^{-1}\sigma^2\mathbf{v} = \sigma\mathbf{v}$, tehát $B\begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A\mathbf{v} \\ A^*\mathbf{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma\mathbf{w} \\ \sigma\mathbf{v} \end{bmatrix}$, továbbá $\mathbf{u} = -\sigma^{-1}A\mathbf{v}$-re $A^*\mathbf{u} = -\sigma^{-1}A^*A\mathbf{v} = -\sigma^{-1}\sigma^2\mathbf{v} = -\sigma\mathbf{v}$, így $B\begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A\mathbf{v} \\ A^*\mathbf{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sigma\mathbf{u} \\ -\sigma\mathbf{v} \end{bmatrix}$. Tehát B-nek σ és $-\sigma$ is sajátértéke.

Összesítve, B nem nulla sajátértékei éppen $\pm\sigma$ minden σ szinguláris értékre.