1. *Mi az* $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ *mátrix legnagyobb szinguláris értéke?*

Megoldás: Mivel a mátrix szimmetrikus, szinguláris értékei a sajátértékek abszolút értékei, a legnagyobb szinguláris értéke pedig a spektrálsugara. A legnagyobb és a legkisebb sorösszege is 6, ezért a spektrálsugara, aminek a kettő között kell lennie, szintén 6.

2. *Az alábbi mátrixok közül melyek lesznek irreducibilisek, illetve primitívek?*

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Megoldás: Az első mátrix gráfjában a 3 és az összes többi csúcs között megy él mindkét irányban, máshol viszont nem. Ebből következik, hogy a gráf erősen összefüggő (mindenhonnan mindenhova el lehet jutni a 3-en keresztül), viszont nem primitív, mert a körök hosszának legnagyobb közös osztója 2 (így a páratlanadik hatványok átlójában mindig 0-k vannak).

A második is irreducibilis, mert az első, irreducibilis mátrix gráfja egy éllel még bővült is itt, de emellett primitív is, mivel irreducibilis, és a gráfjában van hurokél.

A harmadik reducibilis, mert a 2-es csúcsba nem megy kívülről él, tehát a $\{2\}$, $\{1,3,4\}$ sorrendben írva a mátrix bázisát, felső blokkháromszögmátrixot kapunk. Mivel nem irrreducibilis, ezért primitív sem lehet.

A negyedik gráfjában a $\{1,3\}$ és $\{2,4\}$ halmaz között nem megy él, így a mátrix nem irreducibilis, és ezért nem is primitív.

Az ötödik mátrix gráfja egy 4 hosszú kör: $1 \to 4 \to 3 \to 2 \to 1$, és még egy él 4-ből 2-be. Ebből nyilván következik, hogy mindenhonnan mindenhova el lehet jutni, tehát a mátrix irreducibilis. A gráfban az irányított körök hosszának legnagyobb közös osztója 1 (van 4 és 3 hosszú irányított kör is), és ebből az irreducibilitás mellett következik, hogy a mátrix primitív.

3. *Bizonyítsuk be, hogy egy $A \geq 0$ irreducibilis mátrix minden nemnegatív sajátvektora pozitív.*

Megoldás: Legyen $\mathbf{0} \neq \mathbf{v} \geq 0$, amelyre $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ valamely λ-ra. Minthogy $A \geq 0$, $A\mathbf{v} \geq 0$, tehát λ valós és ≥ 0. Most tekintsük az $A + I$ mátrixot. Erre $(A+I)\mathbf{v} = A\mathbf{v} + \mathbf{v} = (\lambda+1)\mathbf{v}$, következésképpen $(A+I)^n\mathbf{v} = (\lambda+1)^n\mathbf{v}$. A irreducibilitása miatt $(A+I)^n > 0$, tehát $(A+I)^n\mathbf{v} > 0$, s mivel $\lambda + 1 > 0$, ebből $\mathbf{v} > 0$ következik.

4. *Igazoljuk, hogy ha A irreducibilis mátrix, akkor A^T is irreducibilis.*

Megoldás: Ha A irreducibilis, akkor $(A+I)^n > 0$ (ahol $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$), ezért $(A^T+I)^n = ((A+I)^n)^T > 0$, tehát A^T is irreducibilis.

5. *Mikor lesz egy permutációmátrix irreducibilis?*

Megoldás: Minden permutáció felírható diszjunkt ciklusok uniójaként. Ha egynél több ciklusból áll, akkor a mátrix gráfja több diszjunkt, irányított kör uniója, így a mátrix irreducibilis. Ha viszont a permutáció egy n hosszúságú ciklus (ahol a mátrix $n \times n$-es), akkor a gráfja egy n hosszú irányított kör, és ebben minden csúcsból minden csúcsba el lehet jutni, tehát a mátrix irreducibilis.

6. *Igazoljuk, hogy ha egy A szimmetrikus mátrix reducibilis, akkor valamely P permutációmátrixra $P^{-1}AP$ blokkdiagonális alakú!*

Megoldás: Ha a mátrix reducibilis, akkor van olyan P permutációmátrix, amelyre $P^{-1}AP$ felső blokkháromszögmátrix. Minden permutációmátrix ortogonális, így $P^T = P^{-1}$, és $P^{-1}AP = P^TAP$. Viszont ha A szimmetrikus, akkor P^TAP is az $((P^TAP)^T = P^TA^TP^{TT} = P^TAP)$, és egy szimmetrikus blokkháromszögmátrix szükségképpen blokkdiagonális.

7. *Legyen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ szimmetrikus, nemnegatív mátrix. Igazoljuk, hogy A akkor és csak akkor primitív, ha A^2 irreducibilis!*

Megoldás: Ha A primitív, akkor van olyan $k > 0$, hogy $A^k > 0$, sőt minden ennél nagyobb hatványa is pozitív az A mátrixnak. Ebből következik, hogy A^2-nek is pozitívak lesznek a nagy hatványai, így A^2 is irreducibilis (sőt primitív).

Most tegyük fel, hogy A^2 irreducibilis. Mivel A szimmetrikus, $A^2 = AA^T$ átlójában az A sorainak a skalárnégyzetei állnak. A-nak nem lehet $\mathbf{0}$ sora, mert akkor az a sor A^2-ben is $\mathbf{0}$ lenne,

vagyis A^2 reducibilis volna. Tehát A^2 átlójában csupa pozitív elem van. Viszont akkor amellett, hogy A^2 irredubilis, az is igaz, hogy A^2 gráfjában vannak hurokélek, így A^2 szükségképpen primitív, és akkor A is az.

8. *Tegyük föl, hogy A irreducibilis, de nem primitív. Igazoljuk, hogy ekkor A-nak valamely hatványa reducibilis! Mutassunk példát ilyen mátrixra!*

Megoldás: Mivel A irreducibilis, a gráfjában van 1-ből 1-be vezető út, azaz van olyan k, hogy A^k bal fölső eleme pozitív. Ha A^k irreducibilis lenne, akkor ebből már a primitivitása is következne, és akkor A is primitív volna. Tehát A^k reducibilis.

A második feladat első mátrixa irreducibilis, de a négyzete reducibilis: a gráfjában a 3-hoz se bemenő, se kimenő él nincs.

9. *Egy bolha ugrál a számegyenes 1, 2, 3 és 4 pontjain. Minden másodpercben ugrik egyet; ha az 1-esen vagy a 4-esen van, akkor $\frac{2}{3}$ valószínűséggel 1 távolságra, $\frac{1}{3}$ valószínűséggel 2 távolságra ugrik befelé, ha a 2-esen vagy a 3-ason, akkor valamelyik szomszédos számra ugrik, $\frac{1}{2}$-$\frac{1}{2}$ valószínűséggel. Ha véletlenszerűen ráhelyezzük az egyik pontra, hova tart a bolha helyzetének valószínűségeloszlása?*

Megoldás: Az adott állapotokból az adott állapotokba való átmenet valószínűségeit az $A = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 2/3 & 0 & 1/2 & 1/3 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$ primitív mátrix adja meg. A spektrálsugara 1 (az összes oszlopösszeg 1, mert A sztochasztikus), és az 1-hez tartozó sajátvektorok $t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ alakúak. Ha az $A^k\mathbf{v}_0$ sorozat $\mathbf{v}_0$ kiinduló vektora egy valószínűségeloszlás, azaz a vektor elemeinek összege 1, akkor a határérték is az, tehát a sajátvektorok közül az $\begin{bmatrix} 1/6 \\ 2/6 \\ 2/6 \\ 1/6 \end{bmatrix}$ vektort kapjuk.

10. *Foglaljuk táblázatba, hogy a nemnegatív, irreducibilis, primitív, illetve pozitív mátrixokra igazak-e az alábbi állítások:*

a) $\rho(A)$ sajátérték nemnegatív sajátvektorral;
b) $\rho(A)$ sajátérték pozitív sajátvektorral;
c) $\rho(A)$ egyszeres gyöke a karakterisztikus polinomnak;
d) $\rho(A)$ nagyobb minden más sajátérték abszolút értékénél;
e) $\rho(A)$-n kívül más sajátértékhez nem tartozik nemnegatív sajátvektor.

Amelyik nem teljesül, ahhoz adjunk ellenpéldát!

Megoldás:

	$A > 0$	A primitív	A irred.	$A \geq 0$
a) $\rho(A)$-hoz $\exists\ \mathbf{v} \geq 0$	igen	igen	igen	igen
b) $\rho(A)$-hoz $\exists\ \mathbf{v} > 0$	igen	igen	igen	$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
c) $\rho(A)$ egyszeres gyök	igen	igen	igen	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$
d) $\rho(A) > \lvert\lambda\rvert\ \ \forall\lambda \neq \rho(A)$-ra	igen	igen	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
e) $\lambda \neq \rho(A)$-hoz $\nexists\ \mathbf{v} \geq 0$	igen	igen	igen	$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$