1. *A következő mátrixok közül melyik normális? Közülük az önadjungáltak milyen jellegűek (milyen definitek)?*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Megoldás: A és D szimmetrikus, tehát önadjungált, és így normális is. $B^*B = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$, így B nem normális. $C^*C = CC^* = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$, ezért C normális. (Egyébként a C normalitása abból is látszik, hogy egy unitér mátrixnak, $\begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{bmatrix}$-nek skalárszorosa. (Vigyázat, B és C nem ferdén szimmetrikus! Egy ferdén szimmetrikus valós mátrix átlójában nullák állnak.) Az önadjungáltak jellegét szimultán sor-oszlopműveletekkel való diagonalizálással határozzuk meg. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, tehát A pozitív szemidefinit, $D = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, tehát D indefinit.

2. *A következő mátrixok közül melyik irreducibilis, melyik primitív? Amelyik primitív, annak mennyi a spektrálsugara?*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Megoldás: Az A mátrix reducibilis, mert a gráfjában az $\{1,3\}$ és $\{2\}$ részek között nem megy él (akkor is reducibilis lenne, ha csak egyik irányban nem menne), B és C irreducibilis, mert a gráfjukban minden csúcsból minden csúcsot el lehet érni irányított úton (például, mert van bennük irányított Hamilton-kör). B imprimitív, mert a benne szereplő irányított körök legnagyobb közös hosszának osztója 2 (vagy mert B^2 reducibilis). C primitív, mert van benne 2 és 3 hosszúságú irányított kör is, tehát az irányított körök hosszának legnagyobb közös osztója 1 (vagy mert $C^5 > 0$).

3. *Határozzuk meg az* $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ *mátrix minimálpolinomját és Jordan-normálalakját!*

A Jordan-normálalaknak mi a 101. *hatványa? (A^{101}-t nem kell kiszámolni!)*

Megoldás: A mátrix karakterisztikus polinomja $(x+1)^4$, tehát minimálpolinomja $(x+1)$-nek legföljebb 4. hatványa. Mátrixszorzással ellenőrizhetjük, hogy $(A+I)^2 \neq 0$, de $(A+I)^3 = 0$, így a minimálpolinom $(x+1)^3$. Mivel a mátrixnak -1 az egyetlen sajátértéke, a Jordan-normálalakban csak -1-hez tartozó Jordan-blokkok vannak, és a minimálpolinom miatt ezek közül 3×3-as a legnagyobb. Így csak egy 3×3-as és egy 1×1-es blokkból állhat a Jordan-normálalak.

$$J = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$J^{101} = \begin{bmatrix} (-1)^{101} & 0 & 0 & 0 \\ \binom{101}{1}(-1)^{100} & (-1)^{100} & 0 & 0 \\ \binom{101}{2}(-1)^{99} & \binom{101}{1}(-1)^{100} & (-1)^{101} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-1)^{101} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 101 & -1 & 0 & 0 \\ -5050 & 101 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

4. *Adjuk meg az* $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ *mátrix redukált SVD-felbontását és legjobb* 1 *rangú közelítését!*

Megoldás: $A^*A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 8 \end{bmatrix}$, ennek a karakterisztikus polinomja $(1-x)(x^2-10x) = -(x-1)x(x-10)$, tehát A szinguláris értékei $\sigma_1 = \sqrt{10}$, $\sigma_2 = 1$. A redukált SVD-felbontásához A^*A-nak csak a nem nulla sajátértékekhez tartozó sajátvektorai kellenek. 10-hez $\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, 1-hez $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Így $U = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 1 \\ 2/sqrt5 & 0 \end{bmatrix}$, $AU = \begin{bmatrix} \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 1 \\ \sqrt{5} & 0 \end{bmatrix}$. Ennek oszlopait lenormálva kapjuk U'-t: $U' = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 \\ 1/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$.
Tehát A redukált SVD-felbontása:

$$A = U'\Sigma U^* = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 \\ 1/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{10} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} & 0 & 2/\sqrt{5} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

A legjobb 1 rangú közelítéshez az U'-ból csak az első oszlopot, U^*-ból csak az első sort, és Σ-ból a bal fölső 1×1-es részmátrixot használjuk:

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} [\sqrt{10}]\,[1/\sqrt{5} \quad 0 \quad 2/\sqrt{5}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

5. *Definiáljuk egy $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ mátrix általánosított inverzét és pszeudoinverzét! Hogyan használhatjuk lineáris egyenletrendszer megoldásánál az általánosított inverzet, illetve a pszeudoinverzet?*

Megoldás: A' általánosított inverze az A-nak, ha $AA'A = A$. A^+ pszeudoinverze az A-nak, ha $AA^+A = A$, $A^+AA^+ = A^+$, és AA^+ és A^+A is önadjungált (azaz $(AA^+)^* = AA^+$ és $(A^+A)^* = A^+A$). Ha az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer megoldható, akkor $A'\mathbf{b}$ egy megoldás. Viszont $A^+\mathbf{b}$ mindenképpen megadja a legjobban közelítő megoldást (tehát amelyre $|A\mathbf{x} - \mathbf{b}|$ minimális), akár megoldható az egyenletrendszer, akár nem.

6. *Bizonyítsuk be, hogy ha egy 1 rangú nemnegatív mátrix irreducibilis, akkor primitív is! Adjunk meg olyan 3×3-as, 2 rangú, irreduciblis mátrixot, amely nem primitív!*

Megoldás: 1. megoldás: Mivel a mátrix rangja 1, a magtere, azaz a 0-hoz tartozó sajátaltere $n-1$ dimenziós, és így a 0 legalább $(n-1)$-szeres gyöke a karakterisztikus polinomnak. Így $\rho(A)$ mellett nem lehet más sajátérték, aminek az abszolút értéke $\rho(A)$. Tehát A primitív.

2. megoldás: Ha a mátrix rangja 1, akkor minden sora valamely sornak a skalárszorosa. Az irreducibilitás miatt a mátrixnak nem lehet $\mathbf{0}$ sora (ez azt jelentené, hogy a hozzá tartozó csúcsból nem megy ki él), tehát az összes sor egy nem nulla sornak pozitív skalárszorosa. Ha ebben a sorban van 0, akkor a mátrixnak lenne $\mathbf{0}$ oszlopa, azaz lenne olyan csúcsa, amelyikbe nem megy él, és ez ellentmondana a mátrix irreducibilitásának. Tehát ez a sor pozitív, és így az egész mátrix is, következésképpen a mátrix primitív.

2 rangú imprimitív 3×3-as mátrixra jó példa a $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ mátrix. Be lehet látni (bár ez nem része a feladatnak), hogy csak ilyen gráfú mátrix jó.

Ha az irreducibilis A mátrix nem primitív, akkor minden diagonális eleme 0. Először nézzük azt az esetet, amikor egyik sor sem skalárszorosa semelyik másiknak. Minthogy a rang 2, valamelyik sor másik kettőnek lineáris kombinációja, ahol semelyik együttható sem nulla. A nemnegativitás miatt nem lehet mindkét együttható negatív, és így van olyan sor is, amelyik másik kettőnek pozitív együtthatós kombinációja. De akkor a diagonális helyen levő 0-t csak úgy kaphattuk, hogy az egész oszlop 0 volt, ami ellentmond az irreducibilitásnak.

Marad az az eset, amikor két sor egymásnak pozitív skalárszorosa (0 sor nem lehet a mátrixban). Mivel a diagonális elemek 0-k, ezekben a sorokban csak egy (azonos) indexű helyen van nem nulla elem, azaz két csúcsból csak egy-egy él megy, és az is a harmadikba. Ahhoz, hogy a mátrix irreducibilis legyen, a harmadikból mindkét csúcsba kell, hogy menjen él, önmagába pedig az imprimitivitás miatt nem mehet.