2. előadás

Mátrix rangjának ekvivalens megfogalmazásai (oszloptér dim., sortér dim., leképezés rangja, aldeterminánsok, lépcsős alak)

$K^{n\times n}$-beli **mátrix invertálhatóságának** ekvivalens feltételei (leképezés izomorfizmus, rang $= n$, inhomogén e.r. megoldhatósága, homogén e.r. egyértelmű megoldása, redukált lépcsős alak I, determináns $\neq 0$)

Fischer-egyenlőtlenség: Ⓑ Legyenek $C_1, \ldots, C_k \subseteq \{1, \ldots, n\}$ különbözők, és tegyük fel, hogy valamely $1 \leq \lambda \leq n$-re $|C_i \cap C_j| = \lambda$ minden $i \neq j$-re. Ekkor $k \leq n$.

Bizonyítás: Ha van olyan C_i, amely λ elemű, akkor $C_i \subset C_j$ minden $j \neq i$-re, és C_i, $C_j \setminus C_i$ $(i \neq j)$ mind diszjunkt halmazok, így $k \leq n$. Ha ilyen halmaz nincs, akkor $|C_i| = \lambda_i + a_i$, ahol $a_i > 0$ $(i = 1, \ldots, k)$. Legyen $M \in \mathbb{R}^{k\times n}$ a halmazok karakterisztikus vektoraiból mint sorokból alkotott mátrix (illeszkedési mátrix): $m_{ij} = 1$, ha $j \in C_i$, és különben 0. Legyen $A = MM^T \in \mathbb{R}^{k\times k}$. Ekkor $a_{ij} = \lambda$, ha $i \neq j$, és $a_{ii} = \lambda + a_i$. Számítsuk ki A determinánsát! Ez a kifejtési tétel szerint megegyezik annk a $(k+1)\times(k+1)$-es mátrixnak a determinánsával, amelyet az A-ból úgy kapunk, hogy fölé teszünk egy csupa 0-ból álló sort, majd az egész elé egy $(1, 0, \ldots, 0)$ oszlopot. Ha most az első sor λ-szorosát kivonjuk mindegyik sorból, majd az i. oszlop $\frac{\lambda}{a_i}$-szeresét hozzáadjuk az első oszlophoz minden i-re, akkor háromszögmátrixot kapunk, amelynek determinánsa $|A| = (1+\frac{\lambda}{a_1}+\ldots\frac{\lambda}{a_k})a_1\cdots a_k > 0$, így $k = \operatorname{rang} A = \operatorname{rang}(MM^T) \leq \operatorname{rang} M \leq n$.

Polinominterpoláció

Tétel: Ⓑ Minden K testre és $a_i, b_i \in K$ $(i = 1, \ldots, n)$ elemekre, ahol az a_i-k különbözők van egyértelmű $p(x) \in K[x]_{<n}$, hogy $p(a_i) = b_i$ $\forall i$.

Bizonyítás dimenziótétellel

Newton-féle interpoláció

Shamir-féle titokmegosztás

Lineáris leképezés (transzformáció) felírása új bázispárban (bázisban)

$Q^{-1}AP$, ill. $P^{-1}AP$

mátrixok hasonlósága

Sajátérték, sajátvektor, spektrum, diagonalizálás

Definíciók, spektrálfelbontás ($A = PDP^{-1}$, ahol D diagonális), sajátértékek és sajátvektorok kiszámítása, karakterisztikus polinom.