3. előadás

Minimálpolinom

Minimálpolinom, Cayley–Hamilton-tétel. A minimálpolinom osztója a karakterisztikus polinomnak. Minden sajátérték gyöke a minimálpolinomnak.

Mátrixok invariánsai

Hasonló mátrixokra megegyezik a karakterisztikus polinom, minimálpolinom, determináns, rang, spektrum, sajátaltér dimenziója.

Vektorterek direkt összege Direkt összeg definíciója három ekvivalens feltétellel:
(i) $\sum_{i=1}^{k} V_i = V$ és $V_i \cap \sum_{j \neq i} V_j = \{\mathbf{0}\}$;
(ii) V minden eleme egyértelműen írható $\mathbf{v}_1 + \ldots + \mathbf{v}_k$ alakban;
(iii) van V-nek $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{B}_k$ bázisa, hogy $\mathcal{B}_i$ bázisa V_i-nek.

Invariáns altér, mátrix felírása $U \oplus W$ felbontáshoz illő bázisban, ahol az egyik vagy mindkét altér A-invariáns.

Blokkmátrixok szorzása.

Tétel: Ⓑ Ha $A \in K^{n \times n}$ minimálpolinomja $m(x) = f(x)g(x)$, ahol $f(x), g(x) \in K[x]$ relatív prím, 1 főegyütthatós polinomok, akkor A hasonló egy olyan blokkdiagonális mátrixhoz, amelynek a diagonális blokkjai $f(x)$, illetve $g(x)$ minimálpolinomúak.

Tétel (az előző tétel következménye): Egy mátrix pontosan akkor diagonalizálható, ha minimálpolinomja különböző gyöktényezők szorzatára bomlik:
$m(x) = (x - c_1)(x - c_2) \cdots (x - c_k)$, ahol $c_1, \ldots, c_k$ különbözők.