4. előadás

Jordan-féle normálalak

Jordan-blokk, Jordan-mátrix definíciója.

Tétel: Minden komplex négyzetes mátrix hasonló egy Jordan-mátrixhoz, és ez a Jordan-mátrix a blokkok sorrendjétől eltekintve egyértelmű.

Bizonyítás vázlata: A korábbi tétel miatt a mátrix felírható olyan blokkdiagonális mátrixként, amelyek diagonális blokkjainak minimálpolinomja $(x-\lambda)^\beta$ alakú. Az ilyenek Jordan-normálalakja visszavezethető az x^β alakú minimálpolinommal rendelkező N mátrixok normálalakjára. Ehhez úgy választunk alkalmas bázist, hogy azon a transzformáció $\mathbf{b}_1 \mapsto \dots \mapsto \mathbf{b}_{t_1} \mapsto \mathbf{0}$, $\mathbf{b}_{t_1+1} \mapsto \ldots \mapsto \mathbf{b}_{t_2} \mapsto \mathbf{0}$, stb. módon hasson.

A Jordan-normálalak felhasználása:

Eldönthető vele két mátrix hasonlósága.
Könnyen hatványozható, így alkalmas A^n, illetve A más függvényeinek kiszámítására.
Jobban megérthető belőle egy lineáris transzformáció hatása.

Jordan-normálalak meghatározása a bázis megkeresése nélkül: az $A-\lambda I$ hatványainak rangjából megállapítható, hogy milyen méretű λ-blokkból hány van.

Ha $k_A(x)$-ben minden sajátérték legföljebb 6 multiplicitású, akkor a Jordan-normálalakban a λ-blokkok méretének meghatározásához elegendő:

$k_A(x)$-ben $(x-\lambda)$ kitevője: ez a λ-blokkok méretének összege;
$m_A(x)$-ben $(x-\lambda)$ kitevője: ez a legnagyobb λ-blokk mérete;
a λ-hoz tartozó sajátaltér dimenziója: ez a λ-blokkok száma.

Jordan-mátrix hatványozása: blokkonként; ha J egy $n \times n$-es λ-blokk, akkor $J^k = (N+\lambda I)^t = \sum_{t=0}^{k} \binom{k}{t} \lambda^{k-t} N^k$, ahol N egy $n \times n$-es 0-blokk, tehát J^k-ban a főátlóval párhuzamosan, t-vel alatta végig $\binom{k}{t}\lambda^{k-t}$ áll, a főátló fölött pedig csupa 0.

Köv.: Hatványsorba fejthető f függvényre $f(J)$ olyan alsó háromszögmátrix, amelyben a főátlóval párhuzamosan t-vel alatta végig $\frac{1}{t!}f'(\lambda)$ áll. Ez használható pl. lineáris differenciálegyenlet-rendszerek megoldásánál.