8. előadás

Példák öndajungált és unitér transzformációkra:

merőleges vetítés: π_W mátrixa $U_1U_1^* = I - U_2U_2^*$, ahol U_1 oszlopai a W altérnek, U_2 oszlopai a $W^\perp$ altérnek ortonormált bázisát adják. Speciálisan, $\mathbf{n}$ normálvektorú hipersíkra való vetítés mátrixa $I - \frac{1}{|\mathbf{n}|^2}\mathbf{n}\mathbf{n}^*$. π_W önadjungált, pozitív szemidefinit.

tükrözés: $\tau_W = 2\pi_W - I = I - 2\pi_{W^\perp}$, mátrixa $2U_1U_1^* - I = I - 2U_2U_2^*$. τ_w önadjungált és unitér, indefinit.

permutációs mátrixok: a báziselemeket permutálják, minden sajátértéke komplex egységgyök. Unitérek. Az n báziselemet ciklikusan permutáló mátrix sajátértékei az n-edik komplex egységgyökök, diagonalizáló mátrixa Vandermonde-mátrix.

Mátrixok általánosított inverzei

Jobb és bal inverz definíciója:

B jobb inverze A-nak, ha $AB = I$, C bal inverze A-nak, ha $CA = I$

Létezésének feltétele:

$A \in K^m \times n$-nek akkor és csak akkor van jobb inverze, ha $\operatorname{rang} A = m$, és akkor és csak akkor van bal inverze, ha $\operatorname{rang} A = n$.

Az egy oldali inverz kiszámítása:

Gauss-módszerrel (szimultán egyenletrendszer-megoldás).

Általánosított inverz:

Definíciója: A' az A-nak általánosított inverze, ha $AA'A = A$.

Kiszámítása: SAP-módszerrel. Az $A \in K^{m\times n}$ mátrixot elemi sorműveletekkel redukált lépcsős alakra hozzuk (a melléírt, illeszkedő méretű egységmátrix közben az S mátrixszá alakul), majd ezt elemi oszlopműveletekkel $\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ alakra hozzuk (az oszlopműveletek elkezdésénél aláírt, illeszkedő méretű egységmátrixból ezzel P lesz). Az összes általánosított inverzet megkapjuk $P\begin{bmatrix} I_r & X \\ Y & Z \end{bmatrix}S$ alakban, ahol X, Y, Z tetszőleges mátrixok, amelyekkel a középső mátrix $n \times m$-es lesz, és $r = \operatorname{rang}(A)$.

Állítás: Ha az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ egyenletrendszernek van megoldása, és A' az A egy általánosított inverze, akkor $A'\mathbf{b}$ egy megoldása az egyenletrendszernek.

Megj. Akkor célszerű alkalmazni, ha ugyanazzal a mátrixszal sok különböző konstansú egyenletrendszert kell megoldani. Viszont mindig ellenőrizni kell, hogy valóban megoldást kaptunk-e (ha nem, akkor nincs megoldás).