9. előadás

Moore–Penrose-féle pszeudoinverz

Definíciója: $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ mátrix pszeudoinverze az $A^+ \in \mathbb{C}^{n\times m}$ mátrix, ha
(1) $AA^+A = A$
(2) $A^+AA^+ = A^+$
(3) $(AA^+)^* = AA^+$
(4) $(A^+A)^* = A^+A$

Állítás: Ⓑ $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$-nek $\mathbf{x} = A^+\mathbf{b}$ az egyik legjobban közelítő megoldása (azaz amelyre $A\mathbf{x} - \mathbf{b}$ minimális).

A pszeudoinverz egyértelmű.

A pszeudoinverz kiszámítása:

Teljes rangú esetek: ha $\operatorname{rang} A = m$, akkor $A^+ = A^*(AA^*)^{-1}$, ha $\operatorname{rang} A = n$, akkor $A^+ = (A^*A)^{-1}A^*$.

Általános eset: $\operatorname{rang} A = r$ esetén A felbontható két teljes rangú mátrix szorzatára: $A = BC$, ahol $B \in \mathbb{C}^{m\times r}$ és $C \in \mathbb{C}^{r\times n}$, és ekkor $A^+ = C^+B^+$. A BC-felbontást Gauss-módszerrel végezzük: redukált lépcsős alakra hozás után B az A-nak a lépcsős alak vezéregyesei oszlopának megfelelő sorszámú oszlopaiból áll, C pedig a redukált lépcsős alak nem nulla soraiból.

SVD: Szinguláris értékek szerinti felbontás

Önadjungált, pozitív definit mátrixok SVD-je: a spektrális felbontás UDU^*

Önadjungált, de nem pozitív definit mátrixok SVD-je: a spektrális UDU^* módosításával $U'D'U^*$, ahol D' átlós elemei a sajátértékek abszolút értékei, U'-t pedig U-ból úgy kapjuk, hogy a negatív sajátértékekhez tartozó oszlopokat -1-gyel szorozzuk.

Ⓑ $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$-re A^*A öndajungált, pozitív szemidefinit mátrix, amelyre $\operatorname{rang}(A^*A) = \operatorname{rang} A$.
Definíció: $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $r = \operatorname{rang} A$ esetén A **szinguláris értékei** $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \sigma_r > 0$, ahol $\sigma_1^2 \geq \sigma_2^2 \geq \cdots \geq \sigma_r^2$ az A^*A nemnulla sajátértékei.

Tétel (SVD)
Legyen $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, és $\operatorname{rang} A = r$. Ekkor $\exists\, M' \in \mathbb{C}^{m\times m}$ és $M \in \mathbb{C}^{n\times n}$ unitérek, hogy $A = M'\Sigma'M^*$, ahol $\Sigma' = \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, és $\Sigma \in \mathbb{R}^{r\times r}$ az A szinguláris értékeit fogyó sorrendben tartalmazó diagonális mátrix.

Egyértelműség: Ha $A = UDV$, ahol U, V unitérek és D diagonális, monoton fogyó nemnegatív diagonális elemekkel, akkor $D = \Sigma'$.

SVD kiszámítása: A^*A sajátértékei $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_n$, $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$ $i = 1, \ldots, r$, és a λ_i-khez tartozó sajátvektorokból álló ortonormált bázis (a sajátértékek csökkenő sorrendjében) az M oszlopai (a sajátalterek merőlegesek egymásra, de ha van többdimenziós sajátaltér, akkor azon belül ortogonalizálni kell). $AM = [T|0]$, ahol T nemnulla oszlopokból áll, és $T^*T = \Sigma^2$. T oszlopait a σ_i-kkel leosztva kapjuk T'-t: $T' = T\Sigma^{-1}$, és $M' = [T'|T_1]$ unitér.

Tétel (Redukált SVD): Legyen $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, és $\operatorname{rang} A = r$. Ekkor $\exists\, U \in \mathbb{C}^{n\times r}$ és $U' \in \mathbb{C}^{m\times r}$, hogy $U^*U = (U')^*U' = I_r$, és $A = U'\Sigma U^*$.

Redukált SVD kiszámítása Az SVD-ből U az M első r oszlopa, U' pedig az M' első r oszlopa. De az SVD kiszámítása során ekkor elég A^*A nemnulla sajátértékeihez sajátvektorokat keresni (r függetlent, amelyek ortonormált rendszert alkotnak), és AU oszlopait lenormálva kapjuk U'-t.

Ha $A = M'\Sigma'M^*$ SVD-felbontás, és U, V unitér, akkor $A^* = M(\Sigma')^T(M')^*$, $UA = (UM')\Sigma'M^*$ és $AV = M'\Sigma'(V^*M)^*$ is SVD-felbontás.