10. előadás

A pszeudoinverz alkalmazásai Legyen $A = M'\Sigma' M^* = U'\Sigma U^*$ SVD, illetve redukált SVD.

1. Poláris felbontás: $A = PQ$, ahol $P = M'\Sigma'(M')^*$ pozitív szemidefinit és $M'M^*$ unitér.
2. Pszeudoinverz: $A^+ = U\Sigma^{-1}(U')^*$.
3. $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ legjobb közelítő megoldása az egységkörön: M utolsó oszlopa (a hiba σ_n, ill. $r < n$ esetén 0).
4. Alacsony rangú közelítés (Eckart–Young-tétel): $k \le r$-re $A^{(k)} = (U')^{(k)}\Sigma^{(k)}(U^{(k)})^*$ a legjobb k rangú közelítése az A mátrixnak, ahol $(U')^{(k)}$ és $U^{(k)}$ az U', illetve U első k oszlopából áll, és $\Sigma^{(k)}$ a Σ bal fölső $k \times k$-as részmátrixa. A közelítés hibája $||A - A^{(k)}|| = \sqrt{\sigma_{k+1}^2 + \ldots + \sigma_r^r}$.

Mátrixok QR-felbontása

Egy $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix felbontása $A = QR$ alakra, ahol Q unitér (azaz ortogonális), R pedig felső háromszögmátrix.

A Householder-tükrözések módszere

Tetszőleges $\mathbf{v}$ és $\mathbf{w}$ nem nulla vektorokhoz van olyan tükrözés, amely $\mathbf{v}$-t a $\mathbf{w}$ egy skalárszorosába, $\mathbf{w}_0 = \frac{|\mathbf{v}|}{|\mathbf{w}|}\mathbf{w}$-be viszi. Ez az $\mathbf{n} = \mathbf{v} - \mathbf{w}_0$ normálvektorú hipersíkra való tükrözés, amelynek mátrixa $I - 2\frac{\mathbf{n}\mathbf{n}^T}{|\mathbf{n}|^2}\mathbf{n}$. Ezek a tükrözések unitér transzformációk, így a szorzatuk is az. Az A mátrixot ilyen unitér mátrixokkal való balszorzással hozzuk felső háromszögalakra. A Q_1 olyan tükrözés, ami A első oszlopát $\mathbf{e}_1$ skalárszorosába viszi. Amikor a mátrix első k oszlopa már megfelel a felső háromszögalaknak, akkor a jobb alsó $(n-k)\times(n-k)$-as részmátrix első oszlopához választunk Q'_{k+1}-et, és a teljes mátrixot a $Q_{k+1} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & Q'_{k+1} \end{bmatrix}$ szintén unitér mátrixszal szorozzuk meg. Így $Q_n \cdots Q_2 Q_1 A = R$ felső háromszögmátrix, tehát a $Q = (Q_n \cdots Q_1)^{-1} = Q_1^* \cdots Q_n^*$ unitér mátrixszal az $A = QR$ felbontást kapjuk.

A QR-felbontás alkalmazása

Sajátértékek közelítő kiszámítása: Az $A_1, A_2, \ldots$ mátrixsorozat, ahol $A_1 = A$, $A_i = Q_i R_i$, $A_{i+1} = R_i Q_i = Q_{i+1}R_{i+1}$, ha konvergens, olyan $\tilde{A}$ felső háromszögmátrixhoz konvergál, amelynek sajátértékei (és így az átlós elemei) megegynek A sajátértékeivel,
és a $Q = Q_1 Q_2 \cdots$ unitér mátrixszal $\tilde{A} = Q^* A Q$.

Nemnegatív mátrixok

Definíció: pozítív és nemnegatív mátrix, $A \ge B$, $A > B$
Ha $A > 0$ és $\mathbf{0} \ne \mathbf{v} \ge 0$, akkor $A\mathbf{v} > 0$.
Spektrálsugár, $\rho(A)$: a sajátértékek abszolút értékének maximuma

Irreducibilis mátrixok definíciója és különböző jellemzései (permutációmátrixszal nem konjugálható valódi felső blokkháromszögmátrixba; a gráfja erősen összefüggő, $(A+I)^n > 0$).

Primitív mátrixok Egy $A \ge 0$ mátrix primitív, ha van olyan $k > 0$, hogy $A^k > 0$.
Mátrix primitivitásának eldöntésénél használható állítások

1) Ha A irreducibilis, és $A^k > 0$, akkor $A^{k+1} > 0$ (tehát egy primitív mátrixnak valahonnan kezdve pozitívak a hatványai).
2) Ha A irreducibilis, és A gráfjában van hurokél (azaz A átlójában van pozitív elem), akkor A primitív.
3) Ha A irreducibilis, akkor A akkor és csak akkor primitív, ha A gráfjában az irányított körök hosszának legnagyobb közös osztója 1.