11. előadás

Nemnegatív mátrixok spektrálsugara

$\rho'(A) = \max\{\, r \in \mathbb{R} \mid \exists \mathbf{v} \geq 0,\ \mathbf{v} \neq \mathbf{0},\ A\mathbf{v} \geq r\mathbf{v} \,\}$
$\rho(A) = \max\{\, |\lambda| \mid \lambda \text{ sajátérték} \,\}$
Tétel: Ha $A \geq 0$, akkor $\rho'(A) = \rho(A)$.

Tétel: Ha $A \geq 0$, akkor

$$\text{a legkisebb sorösszeg} \leq \rho(A) \leq \text{a legnagyobb sorösszeg}$$
$$\text{a legkisebb oszlopösszeg} \leq \rho(A) \leq \text{a legnagyobb oszlopösszeg}$$

Gerschgorin-körök: Ha $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, akkor A minden sajátértéke benne van a $|z - a_{ii}| \leq \sum\limits_{j\neq i} |a_i j|$ körök valamelyikében.

Perron-tétel Legyen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ pozitív mátrix, és $\rho = \rho(A)$ az A spektrálsugara

(1) ρ-hoz van, és $\mathbf{v} > 0$ valós sajátvektor;
(2) a ρ-hoz tartozó sajátaltér egydimenziós;
(3) ha egy λ sajátértékre $\lambda| = \rho$, akkor $\lambda = \rho$;
(4) λ csak egyszeres gyöke a $k_A(x)$ karakterisztikus polinomnak.

Frobenius-tétel: $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ nemnegatív, irreducibilis mátrixnak $\rho(A)$ sajátértéke pozitív sajátvektorral, és $\rho(A)$ egyszeres gyöke a karakterisztikus polinomnak.