LINEÁRIS ALGEBRA ÉS ALKALMAZÁSAI

Lukács Erzsébet, 2015

Használjuk, de nem ismételjük:

Gauss-módszer lineáris egyenletrendszerek megoldására
mátrixműveletek (invertálás is)
determináns

Röviden ismételjük:

vektorterek, lineáris leképezések és mátrixaik,
sajátértékek, sajátvektorok, diagonalizálás

Feladat: Egy kerek asztal körül n ember ül, mindenki előtt egy tízforintos, és a következő játékot játsszák. Vezényszóra mindenki megnézi a jobb szomszédja előtti érmét, és ha az fejet mutat, akkor megfordítja a saját tízforintosát. Ezt addig ismétlik, amíg mindegyik pénzérme írást nem mutat. Milyen n-ekre igaz, hogy a pénzérmék tetszőleges kezdeti állása esetén véget ér a játék?

Vektorterek

Pl. $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^{n\times m}$, $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{C}[x]$, $C[0,1]$, stb.

K test fölötti **vektortér** V
vektorok: $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \ldots \in V$,
skalárok: $x, y, \alpha, \beta, \ldots, \lambda, \ldots \in K$,
műveletek: $\mathbf{u}+\mathbf{v} \in V$, $\lambda\mathbf{v} \in V$,
axiómák: $\exists \mathbf{0}$, $\exists -\mathbf{v}$, műveleti azonosságok.
K lehet $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, vagy $\mathbb{C}$ más részteste, vagy véges testek, pl. p prímre
$\mathbb{F}_p = \{\, 0, 1, \ldots, p-1 \,\}$, $+, \cdot$ modulo p.
Fontos: itt $\alpha + \ldots + \alpha = n\alpha = 0$, ha $p \mid n$,
$(\alpha+\beta)^p = \alpha^p + \beta^p$ (binom. tételből)

altér: zárt a műveletekre, $\neq \emptyset$, jele: $W \leq V$, W altere V-nek
pl. $\mathbb{R}^3$ alterei: origón átmenő pont, egyenes, sík, $\mathbb{R}^3$
$\mathbb{R}[x] \geq \mathbb{R}[x]_{\leq n}$: $\leq n$-edfokú polinomok.

generált altér: a legszűkebb altér, ami tartalmazza az adott részhalmazt
= a részhalmazt tartalmazó alterek metszete
= a részhalmazból alkotott lineáris kombinációk halmaza:
$\{\, \sum \lambda_i \mathbf{v}_i \mid \mathbf{v}_i \in \text{részhalmaz},\ \lambda_i \in K \,\}$

generátorrendszer: ami generálja az egész teret: $\forall$ vektor előállítható belőle

lineárisan független rendszer: $\sum \lambda_i \mathbf{b}_i = \mathbf{0} \Rightarrow \lambda_i = 0 \forall i$, azaz
ami előállítható belőle, az csak egyféleképpen

bázis: generátorrendszer és független
= maximális független rendszer (nem bővíthető)
= minimális generátorrendszer (nem szűkíthető)

$\forall$ független rendszer kiegészíthető bázissá, $\forall$ generátorrendszer leszűkíthető bázissá

dimenzió egy bázis elemszáma (egyértelmű!)

Csak véges dimenziós vektorterekkel foglalkozunk.

n-dimenziós térre ekvivalens:

(i) $\mathcal{B}$ bázis

(ii) $|\mathcal{B}| = n$, és $\mathcal{B}$ független

(iii) $|\mathcal{B}| = n$, és $\mathcal{B}$ generátorrendszer.

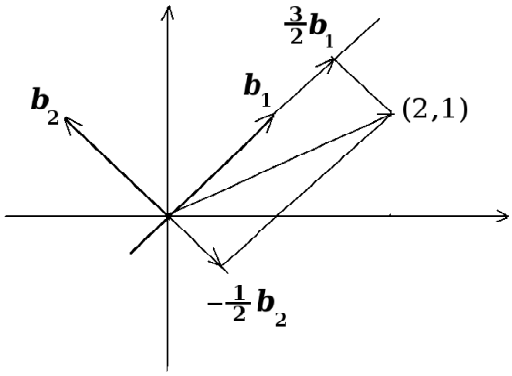
Pl. $\mathbb{R}^{2\times 2}$ egy bázisa $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$, $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$ egy bázisa $\{1, i\}$.

n-dimenziós térben $\mathcal{B}$ bázisra minden vektor egyértelműen írható $\sum x_i \mathbf{b}_i$ alakban $\longrightarrow$ koordinátázás: $\mathbf{v} = \sum x_i \mathbf{b}_i$-re a **v koordinátavektora**

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = (x_1, \ldots, x_n)^T$$

Pl. $\mathbb{R}^2$-ben $\mathcal{B} = \{(1,1), (-1,1)\}$-re $[(2,1)]_{\mathcal{B}} = ?$

Mo.:



$$[(2,1)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3/2 \\ -1/2 \end{bmatrix}.$$

rang (vektorrendszeré): a generált altér dimenziója.

kiszámítása Gauss-módszerrel:

a lépcsős alak $\neq 0$ sorainak (vezérelemeinek) száma

mátrix rangja: az oszloptér dimenziója

= a sortér dimenziója

lineáris leképezés: $f : V \to W$ (V és W K fölötti vektorterek), amelyre

$$f(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v})$$
$$f(\lambda\mathbf{v}) = \lambda f(\mathbf{v})$$

Pl. $\mathbb{R}^3$ $\mathbf{0}$-t helybenhagyó egybevágóságai, $\mathbb{R}[x]$-ben a deriválás.

lineáris transzformáció: lineáris leképezés, ahol $V = W$

lineáris leképezés mátrixa:

$$f : V \to W$$

bázisuk: $\mathcal{B}$ $\mathcal{C}$

Olyan A mátrix kell, amelyre $f : \mathbf{v} \mapsto \mathbf{w}$ esetén $A \cdot [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = [\mathbf{w}]_{\mathcal{C}}$.

Ilyen $\exists!$ a $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$-hez:

$$A = [f]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \Big[\, [f(\mathbf{b}_1)]_{\mathcal{C}} \;\Big|\; \dots \;\Big|\; [f(\mathbf{b}_1)]_{\mathcal{C}} \,\Big]$$

lineáris transzformáció mátrixa: általában $\mathcal{C} = \mathcal{B}$

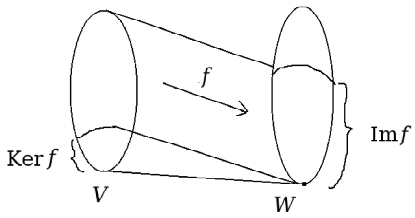
$[f]_{\mathcal{B}} := [f]_{\mathcal{B},\mathcal{B}}$

Pl. Írjuk fel $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$-ben a $z \to \overline{z}$ mátrixát az $\{1, i\}$, illetve a $\{i, 1+i\}$ bázisban!

Mo.: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, illetve $\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

képtér: $\operatorname{Im} f = \{\, f(\mathbf{v}) \mid \mathbf{v} \in V \,\} \leq W$

magtér: $\operatorname{Ker} f = \{\, \mathbf{v} \in V \mid f(\mathbf{v}) = \mathbf{0} \,\} \leq V$



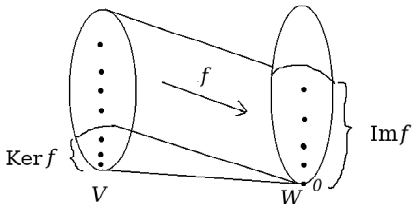
f **injektív**, ha $\operatorname{Ker} f = \{\, \mathbf{0} \,\} =: 0$

f **szürjektív**, ha $\operatorname{Im} f = W$

f **izomorfizmus**, ha f injektív és szürjektív.

Dimenziótétel. Legyen $\dim V = n$, $f : V \to W$ lineáris. Ekkor

$$\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = n$$



Köv.: $f : V \to V$, $\dim V = n$ esetén

$$f \text{ izo} \Leftrightarrow f \text{ inj.} \Leftrightarrow f \text{ szürj.}$$

Pl. a koordinátázás izomorfizmus: $|\mathcal{B}| = n$ esetén

$$V \to K^n$$
$$\mathbf{v} \mapsto [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$$

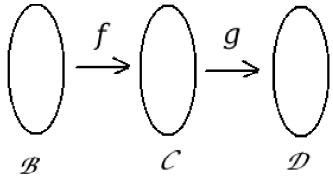
Előírhatósági tétel: Bázison tetszőlegesen előírhatjuk, és ezzel egyértelműen meg is határozzuk a lináris leképezést.

lineáris leképezés rangja: $\operatorname{rang} f = \dim \operatorname{Im} f = \operatorname{rang}[f]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ tetszőleges $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ bázispárra

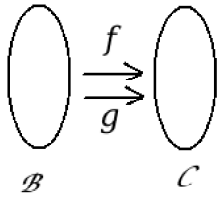
$\dim V = n$, $f : V \to V$ esetén f izomorfizmus $\Leftrightarrow \operatorname{rang} f = n$.

Mátrixműveletek és leképezések:

$$[g]_{\mathcal{C},\mathcal{D}} \cdot [f]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = [g \circ f]_{\mathcal{B},\mathcal{D}}, \text{ ahol } (g \circ f)\mathbf{v} := g(f(\mathbf{v}))$$



$$[f]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} + [g]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = [f+g]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}, \text{ ahol } (f+g)(\mathbf{v}) := f(\mathbf{v}) + g(\mathbf{v})$$



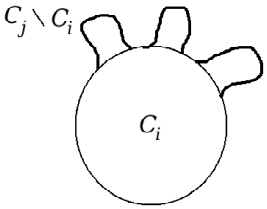
Állítás. *A, B mátrixokra*
1) $\operatorname{rang}(AB) \leq \min\{\operatorname{rang} A, \operatorname{rang} B\}$
2) $|\operatorname{rang} A - \operatorname{rang} B| \leq \operatorname{rang}(A+B) \leq \operatorname{rang} A + \operatorname{rang} B$

Bizonyítás. A mátrixokhoz tartozó lineáris leképezésekkel. Ld. az 1. feladatsorban.

Egy alkalmazás: Fischer-egyenlőtlenség

Tétel. Ⓑ *Legyenek $C_1, \ldots, C_k \subseteq \{1, \ldots, n\}$ különbözők, és tegyük fel, hogy valamely $\lambda > 0$-ra $|C_i \cap C_j| = \lambda$ ($\forall i \neq j$). Ekkor $k \leq n$.*

Bizonyítás. 1. eset: $\exists i$: $|C_i| = \lambda$. Ekkor:



$\Rightarrow n \geq |C_i| + (k-1) \geq k$.

2. eset: $\forall i\ |C_i| = \lambda + a_i$, $a_i > 0$. $X \leq \{1, \ldots, n\}$ karakterisztikus vektora n-dimenziós 0-1-vektor, $(x_1, \ldots, x_n)$, ahol $x_i = 1 \Leftrightarrow i \in X$. Az $M \in \mathbb{R}^{k \times n}$ mátrix i. sora a C_i halmazhoz tartozó karakterisztikus vektor. Ekkor

$$A = MM^T = \begin{bmatrix} \lambda + a_1 & \lambda & \lambda & \ldots & \lambda \\ \lambda & \lambda + a_2 & \lambda & \ldots & \lambda \\ \vdots & & \ddots & & \\ & & & & \lambda + a_n \end{bmatrix}_{k \times k}, \text{ ui. } \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = |X \cap Y|$$

Tudjuk: $\operatorname{rang} A \leq \operatorname{rang} M \leq n$.
Belátjuk: $|A| \neq 0$, tehát $\operatorname{rang} A = k$.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & \lambda + a_1 & \lambda & \ldots & \lambda \\ 0 & \lambda & \lambda + a_2 & \ldots & \lambda \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & \lambda & \ldots & & \lambda + a_n \end{vmatrix}_{(k+1)\times(k+1)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ -\lambda & a_1 & 0 & \ldots & 0 \\ -\lambda & 0 & a_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ -\lambda & 0 & 0 & \ldots & a_n \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 + \frac{\lambda}{a_1} + \ldots + \frac{\lambda}{a_n} & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & a_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_n \end{vmatrix} = (1 + \frac{\lambda}{a_1} + \ldots + \frac{\lambda}{a_n}) \cdot a_1 \cdot \cdots \cdot a_n > 0,$$

mert $\lambda, a_1, \ldots, a_n > 0$. $\square$