Tétel. Legyen $A \in K^{n\times n}$, $m_A(x) = f(x)g(x)$ az A minimálpolinomja, ahol $f(x), g(x) \in K[x]$ 1 főegyütthatós, relatív prím polinomok. Ekkor A hasonló egy $\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$ blokkmátrixhoz, ahol $m_{A_1}(x) = f(x)$ és $m_{A_2}(x) = g(x)$.

Bizonyítás. Jelöljük az A-hoz tartozó $K^n \to K^n$, $\mathbf{x} \to A\mathbf{x}$ transzformációt is A-val, és legyen

$$V = K^n, \quad U = \operatorname{Im} g(A), \quad W = \operatorname{Im} f(A).$$

Belátjuk, hogy $V = U \oplus W$ invariáns alterekre bontás, és a direkt felbontáshoz tartozó bázisban A mátrixa a kívánt alakú.

- $U \leq \operatorname{Ker} f(A)$, $W \leq \operatorname{Ker} g(A)$:
  $f(A)(g(A)\mathbf{v}) = m(A)\mathbf{v} = 0\mathbf{v} = \mathbf{0}$, és ugyanígy a másik.
- U, W A-invariáns:
  $A(g(A)\mathbf{v}) = g(A)(A\mathbf{v}) \in \operatorname{Im} g(A)$, és ugyanígy a másik
- $U + W = V$:
  $1 = a(x)f(x) + b(x)g(x) \Rightarrow \forall \mathbf{v} \in V : \ \mathbf{v} = I\mathbf{v} = f(A)a(A)\mathbf{v} + g(A)b(A)\mathbf{v} \in W + U = U + W$.
- $U \cap W = 0$:
  Ha $\mathbf{v} \in U \cap W$, akkor $\mathbf{v} \in \operatorname{Ker} f(A) \cap \operatorname{Ker} g(A)$ az első észrevétel miatt, így $\mathbf{v} = I\mathbf{v} = a(A)f(A)\mathbf{v} + b(A)g(A)\mathbf{v} = a(A)\mathbf{0} + b(A)\mathbf{0} = \mathbf{0}$.

Tehát $V = U \oplus W$ invariáns alterekre bontás, és az $U \oplus W$-hez tartozó $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \dot\cup \mathcal{B}_2$ bázisban:

$$A \sim \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} = B \text{ blokkdiagonális mátrix,}$$

ahol A_1 az A transzformáció U-ra való megszorításának, $A|_U$-nak a $\mathcal{B}_1$-ben felírt mátrixa, A_2 pedig az $A|_W$-nek a $\mathcal{B}_2$-ben felírt mátrixa.

$$U \leq \operatorname{Ker} f(A) \text{ és } W \leq \operatorname{Ker} g(A)$$

$$f(A)(U) = 0 \text{ és } g(A)(W) = 0$$

$$f(A_1) = 0 \text{ és } g(A_2) = 0$$

$$m_{A_1}(x) | f(x) \text{ és } m_{A_2}(x) | g(x).$$

Kisebb fokú egyik minimálpolinom sem lehet, mert akkor $h(x) = m_{A_1}(x)m_{A_2}(x)$-re $\deg h < \deg f + \deg g = \deg m$ lenne, miközben

$$h(A) \sim h(B) = \begin{bmatrix} h(A_1) & 0 \\ 0 & h(A_2) \end{bmatrix} = 0.$$

Tehát $m_{A_1}(x) = f(x)$ és $m_{A_2}(x) = g(x)$. □

Tétel. Ⓑ A diagonalizálható $\Leftrightarrow$ $m_A(x) = (x - c_1)\cdots(x - c_k)$, ahol $c_1, \ldots, c_k$ mind különbözők.

Bizonyítás. $\Rightarrow$: $A \sim B = \begin{bmatrix} c_1 I & & \\ & \ddots & \\ & & c_k I \end{bmatrix}$ diagonális, ahol $c_1, \dots, c_k$ különbözők (a bázis permutációjával megoldható, hogy az azonos értékű diagonális elemek egymás után következzenek) $\Rightarrow B - c_i I_n$, i. blokkja 0, amiből $\prod(B - c_i I_n) = 0 \Rightarrow m_A(x) = m_B(x) \mid (x - c_1) \cdots (x - c_k)$ (és kisebb persze nem is lehet, mert $c_1, \dots, c_k$ különböző sajátértékek.

$\Leftarrow$: Az előző tételt rekurzívan alkalmazva: $A \sim \begin{bmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_k \end{bmatrix}$, ahol $m_{A_i}(x) = x - c_i$.

Így $A_i - c_i I = 0$, vagyis $A_i = c_i I$. □

Következmény. Ha $k_A(x)$-nek n különböző gyöke van, akkor A diagonalizálható (mert akkor a $m_A(x) = k_A(x)$-re teljesülnek az előző tétel feltételei).

Jordan-féle normálalak

Def. Jordan-blokk: $\begin{bmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \lambda & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 1 & \lambda \end{bmatrix}$ (ennek csak λ a sajátértéke, de a sajátaltér csak 1-dimenziós).

Jordan-mátrix: blokkdiagonális mátrix, amelynek diagonális blokkjai Jordan-blokkok.

Legyen $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $\begin{aligned} k_A(x) =& (-1)^n (x - \lambda_1)^{a_1} \cdots (x - \lambda_k)^{a_k} \\ m_a(x) =& (x - \lambda_1)^{b_1} \cdots (x - \lambda_k)^{b_k} \end{aligned}$, ahol $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ különbözők.

$(x - \lambda_1)^{b_1}, \dots, (x - \lambda_k)^{b_k}$ páronként relatív prímek, így

$$A \sim B = \begin{bmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_k \end{bmatrix}, \text{ ahol } m_{A_i} = (x - \lambda_i)^{b_i}.$$

$k_{A_1}(x) \cdots k_{A_k}(x) = k_B(x) = k_A(x) = (-1)^n (x - \lambda_1)^{a_1} \cdots (x - \lambda_k)^{a_k}$, és A_k-nak csak λ_i a sajátértéke, így $k_{A_i}(x) = (-1)^{a_i} (x - \lambda_i)^{a_i}$.

Tétel (Jordan). $\forall A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ hasonló egy Jordan-mátrixhoz, és ez a **Jordan-normálalak** a diagonális blokkok sorrendjétől eltekintve egyértelmű.

Bizonyítás. (vázlatosan) Az előbbiek miatt elég $m_A(x) = (x - \lambda)^b$ esetre bizonyítani. $N = A - \lambda I$-re $m_N(x) = x^b$. Azt kell belátni, hogy N hasonló egy olyan blokkmátrixhoz, amelynek blokkjai 0-hoz tartozó Jordan-blokkok, azaz olyan bázis kell, amelyen az N hatása

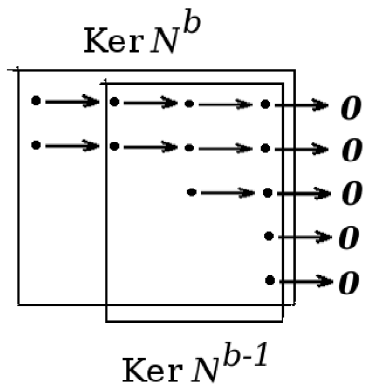
$$\mathbf{b}_1 \mapsto \mathbf{b}_2 \mapsto \dots \mapsto \mathbf{b}_b \mapsto \mathbf{0},$$

$$\mathbf{b}_{b+1} \mapsto \mathbf{b}_{b+2} \mapsto \dots \mapsto \mathbf{0}$$

$$\dots$$

. Ezt a bázist megtaláljuk a következő módon:

$\operatorname{Ker} N^{b-1}$ kiegészítő alterének bázisa $\operatorname{Ker} N^b$-ben (a leghosszabb, azaz b hosszúságú sorozatok eleje);
Az eddigiek N-képe és $\operatorname{Ker} N^{b-2}$ által generált altér kiegészítő alterének bázisa $\operatorname{Ker} N^{b-1}$-ben (a $b-1$ hosszúságú sorozatok eleje), ...



Egyértelműség: Vegyük észre, hogy egy N $k\times k$-as 0-blokknak a hatványai olyan mátrixok, ahol az 1-esek sora egyre lejjebb tolódik a bal alsó sarok felé, és így a rangok is egyesével csökkennek. Ezt felhasználva a $J \sim A$ Jordan-mátrix λ-hoz tartozó blokkjainak méretét leolvashatjuk az $(A-\lambda I)$ hatványainak rangjából: $\operatorname{rang}(A-\lambda_i)^{t-1} - \operatorname{rang}(A-\lambda_i)^t$ a legalább $t\times t$-es λ_i-blokkok száma. (Itt használjuk azt is, hogy ha $A \sim J$, akkor $(A-\lambda I)^k \sim (J-\lambda I)^k$, és a rang invariánsa a mátrixnak.)

A Jordan-normálalak felhasználása

1) Megállapítható belőle, hogy két mátrix hasonló-e.

2) $J = P^{-1}AP$ Jordan-mátrixra J^m könnyen kiszámítható, és így A^m is.

3) Mint a diagonális alaknál, jobban meg lehet érteni a transzformáció működését.

(Vegyük észre, hogy 1)-ben és 3)-ban nem kell a P-t meghatározni!)

Megjegyzés. A Jordan-normálalakot sok helyen a fent definiált mátrix transzponáltjaként adják meg. Mivel minden négyzetes mátrix hasonló a transzponáltjához (ld. a 2. feladatsort), a két normálalak természetes módon megfelel egymásnak.

Jordan-normálalak meghatározása a bázis megadása nélkül

Az egyértelműség bizonyítása a Jordan-tételben megadja az általános módszert. De a legtöbb esetben a mátrix néhány, viszonylag könnyen meghatározható tulajdonsága is elég a Jordan-normálalak megismeréséhez.

Tétel. Legyen $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$,

$$\begin{aligned} k_A(x) =& (-1)^n (x-\lambda_1)^{a_1}\cdots(x-\lambda_k)^{a_k} \\ m_a(x) =& (x-\lambda_1)^{b_1}\cdots(x-\lambda_k)^{b_k}, \text{ ahol } \lambda_1,\dots,\lambda_k \text{ különbözők,} \end{aligned}$$

és legyen J az A Jordan-normálalakja. Ekkor
1) a_i a J-ben a λ_i-blokkok összmérete;
2) b_i a J-ben a λ_i-blokkok maximális mérete;
3) $\dim V_{\lambda_i}$, azaz a λ_i-hez tartozó sajátaltér dimenziója a J-ben a λ_i-blokkok száma.

Bizonyítás. Mivel a karakterisztikus polinom, a minimálpolinom, és a sajátaltér dimenziója is invariánsa a mátrixnak, elég a három feltételt a J Jordan-mátrixra megnézni. Ekkor 1) nyilvánvaló, és 2) következik a 0-blokk hatványozásának szabályából ($J-\lambda_i I_n$ hatványaiban akkor válik 0-vá az összes eredetileg λ_i-blokk, amikor a legnagyobb λ_i-blokk mérete a kitevő). Végül $J - \lambda_i I$ rangja könnyen leolvasható, mert transzponálás után a sorok átrendezésével lépcsős alakú mátrixot kapunk, aminek pontosan annyi **0** sora van, ahány λ_i-blokk volt az eredetiben. □

Következmény. Ha A karakterisztikus polinomjának minden sajátérték legföljebb 6-szoros gyöke, akkor a fenti tétel segítségével meghatározható a Jordan-normálalak.

Pl.

1.

$k(x) = (x-2)^5$
$m(x) = (x-2)^2$
$\dim V_2 = 3$
$5 = 2 + 2 + 1$

$$\left[\begin{array}{cc|cc|ccc}
 & - & - & & & & \\
| & 2 & & | & & & \\
| & 1 & 2 & | & & & \\
 & - & - & & - & - & \\
 & & & | & 2 & & | \\
 & & & | & 1 & 2 & | \\
 & & & & - & - & - \\
 & & & & & | & 2 \\
 & & & & & & -
\end{array}\right]$$

2.

$k(x) = (x-2)^5$
$m(x) = (x-2)^3$
$\dim V_2 = 3$
$5 = 3 + 1 + 1$

$$\left[\begin{array}{cc|cc|cc|c}
 & - & - & - & & & \\
| & 2 & & & | & & \\
| & 1 & 2 & & | & & \\
| & & 1 & 2 & | & & \\
 & - & - & - & - & & \\
 & & & & | & 2 & | \\
 & & & & & - & - \\
 & & & & & | & 2 \\
 & & & & & & -
\end{array}\right]$$

3. Határozzuk meg az A mátrix Jordan-féle normálalakját és a minimálpolinomját!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$k_A(x) = (x-1)^3(x-2)$. Az 1 sajátérékhez tartozó sajátaltér az $A - I$ magtere. Gauss-módszerrel lépcsős alakra hozva $A - I$-t látjuk, hogy a rangja 2, így $\dim V_1 = 4 - 2 = 2$. Tehát a Jordan-mátrixban két 1-blokk van, ami csak egy 2×2-es és egy 1×1-es blokk lehet, és egy 1×1-es 2-blokk:

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

A blokkok maximális mérete alapján $m_A(x) = (x-1)^2(x-2)$.