Áttérés másik bázisra

Legyen A a $\langle\ ,\ \rangle$ bilineáris függvény mátrixa a $\mathcal{B}$ bázisban. Ha $\mathcal{B}'$ egy új bázis, és P az áttérés mátrixa, akkor $\mathbf{x} = [\mathbf{u}]_{\mathcal{B}}$, $\mathbf{y} = [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$, $\mathbf{x}' = [\mathbf{u}]_{\mathcal{B}'}$, és $\mathbf{y}' = [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}'}$ jelöléssel

$$\langle\, \mathbf{u}, \mathbf{v}\,\rangle = \mathbf{x}^* A\mathbf{y} = (P\mathbf{x}')^* AP\mathbf{y}' = \mathbf{x}'^* P^* AP\mathbf{y}',$$

tehát az új mátrix $A' = P^*AP$ (amely valós esetben ugyanaz, mint P^TAP).

Tétel. Minden valós szimmetrikus vagy komplex hermitikus bilineáris függvény Gram-mátrixa valós diagonális alakra hozható alkalmas bázisra áttérve, azaz létezik $\langle\ ,\ \rangle$-re nézve ortogonális bázis.
Mátrixokkal megfogalmazva: Minden valós szimmetrikus vagy komplex önadjungált A mátrixhoz van olyan P mátrix, amellyel P^*AP valós diagonális mátrix.

Bizonyítás. Szimultán sor- és oszlopműveletekkel (az oszlopművelet a komplex esetben a konjugált oszlopművelet, tehát pl. az i. sor c-szeresének a j sorhoz való hozzáadása után az i oszlop $\overline{c}$-szorosát adjuk hozzá a j. oszlophoz) a lépcsős alakra hozás (Gauss-módszer) egyúttal diagonális alakra hozás (mert megtartja a szimmetrikus/hermitikus tulajdonságot). Az elemi sorművelet egy E elemi mátrixszal való balszorzás, a megfelelő oszlopművelet E^T-tal való jobbszorzás, a megfelelő konjugált oszlopművelet az E^*-gal való jobbszorzás. Így

$$M \mapsto E_1 M E_1^* \mapsto E_2 E_1 M E_1^* E_2^* \mapsto \cdots \mapsto D$$

Ekkor $P = E_1^* E_2^* \cdots E_k^* = (E_k \cdots E_2 E_1)^*$-ra $D = P^*MP$. Mivel D diagonális, és $D^* = D$, D valós mátrix lesz. □

Sylvester-féle tehetetlenségi tétel Egy valós szimmetrikus / komplex hermitikus bilineáris függvény bármely diagonális mátrixának átlójában ugyanannyi a pozitív, negatív és 0 elemek száma.

Pl.: 1.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \overset{sor}{\mapsto} \begin{matrix} \\ s_1 - 2s_1 \\ s_3 + s_1 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \overset{oszlop}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \overset{sor}{\mapsto}$$

$$\begin{matrix} \\ \\ s_3 + \frac{3}{4}s_2 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & \frac{9}{4} \end{bmatrix} \overset{oszlop}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{9}{4} \end{bmatrix}$$

Csak $s_j \mapsto s_j + c \cdot s_j$ és $o_j \mapsto o_j + \overline{c} \cdot o_i$ műveletpárokat végezzünk! Azt amúgy sem lehet mindig elérni, hogy a vezérelem 1-es legyen (ld. a tehetetlenségi tételt), és a sorcsere nem mindig vezet eredményre, ha a soron következő oszlop és sor metszetében levő 0-t le akarjuk cserélni, pl. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ egy sorcsere és oszlopcsere után önmagába megy. De:

2.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \overset{sor}{\mapsto} \begin{matrix} s_1 + s_2 \\ \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \overset{oszlop}{\mapsto} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \overset{sor}{\mapsto} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \overset{oszlop}{\mapsto} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

3.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & 1 \end{bmatrix} \overset{sor}{\mapsto} \quad s_2-(1-i)s_1 \begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \overset{oszlop}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Tétel.

Ha A önadjungált / valós szimmetrikus $n \times n$-es mátrix, akkor A-nak mint komplex mátrixnak minden sajátértéke valós, és a következő táblázat soraiban levő három-három állítás ekvivalens.

az $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle := \mathbf{x}^* A\mathbf{y}$ bilineáris függvény:	a bilineáris függvény tetsz. diag. alakjában a diagonális elemek:	A sajátértékei
pozitív definit, azaz $\mathbf{x}^* A\mathbf{x} > 0\ \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$	csupa $+$	csupa $+$
negatív definit, azaz $\mathbf{x}^* A\mathbf{x} < 0\ \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$	csupa $-$	csupa $-$
pozitív szemidefinit, azaz $\mathbf{x}^* A\mathbf{x} \geq 0\ \forall \mathbf{x}$, és lehet 0	$+$ és 0	$+$ és 0
negatív szemidefinit, azaz $\mathbf{x}^* A\mathbf{x} \leq 0\ \forall \mathbf{x}$, és lehet 0	$-$ és 0	$-$ és 0
indefinit, azaz $\exists \mathbf{x}\ \mathbf{x}^* A\mathbf{x} > 0$, és $\exists \mathbf{y}\ \mathbf{y}^* A\mathbf{y} < 0$	$+$ és $-$ (és esetleg 0)	$+$ és $-$ (és esetleg 0)

Bizonyítás. Ha λ sajátértéke A-nak, és $\mathbf{0} \neq \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ hozzá tartozó sajátvektor, akkor

$$\mathbf{v}^* A\mathbf{v} = \mathbf{v}^* \lambda \mathbf{v} = \lambda |\mathbf{v}|^2, \text{ és}$$

$$\mathbf{v}^* A\mathbf{v} = \mathbf{v}^* A^* \mathbf{v} = (A\mathbf{v})^* \mathbf{v} = (\lambda \mathbf{v})^* \mathbf{v} = \overline{\lambda} |\mathbf{v}|^2,$$

tehát $\lambda = \overline{\lambda}$.

Az első és második oszlop állításainak ekvivalenciája azon múlik, hogy ha $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ ortonormált bázis $\langle\ ,\ \rangle$-re nézve (azaz ha erre a bázisra nézve a bilin. fv. mátrixa diagonális), akkor minden $\mathbf{u} = \sum x_i \mathbf{b}_i$-re $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = \sum |x_i|^2 \langle \mathbf{b}_i, \mathbf{b}_i \rangle$, tehát a $\langle \mathbf{b}_i, \mathbf{b}_i \rangle$ diagonális elemek előjele eldönti, hogy milyen előjele lehet $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle$-nak.

A második és harmadik oszlop ekvivalenciája a később bizonyítandó főtengelytételből következik. □

Megjegyzés. A bilineáris függvény jellege csak a $Q(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle$ kvadratikus alakon múlik, de a kvadratikus alakból meg is határozható az eredeti valós szimmetrikus / komplex hermitikus bilineáris függvény.

Pl.: $A = \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & -1 \end{bmatrix}$ önadjungált mátrix ($A^* = A$), és diagonalizálás nélkül is látszik, hogy indefinit (a kvadratikus alak a két báziselemen 1-et, illetve -1-et vesz fel).

$B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ valós, szimmetrikus, de az átlós elemei alapján akár pozitív definit, pozitív szemidefinit vagy indefinit is lehetne. Diagonalizálással tudjuk eldönteni, hogy melyik:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \overset{sor}{\mapsto} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \overset{oszlop}{\mapsto} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

diagonális mátrixa a bilineáris függvénynek, és diagonális elemei 2 és -1, így B indefinit.

Euklideszi terek transzformációi

Def.

$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$	$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$	
unitér	ortogonális	ha $A^* = A^{-1}$
önadjungált	szimmetrikus	ha $A^* = A$
normális		ha $A^*A = AA^*$

Nyilván $A^* = A^{-1}$-ből, illetve $A^* = A$-ból következik, hogy A normális.

Def. Legyen V valós vagy komplex euklideszi tér, és $f : V \to V$ lineáris transzformáció. f unitér/ortogonális, önadjungált/szimmetrikus, illetve normális, ha egy ortonormált bázisban $[f]_{\mathcal{B}}$ olyan.

Tétel. Egy euklideszi tér f lineáris transzformációjára ekvivalens:
(1) f unitér;
(2) f skalárszorzattartó, azaz $\langle f(\mathbf{u}), f(\mathbf{v}) \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$;
(3) f (valamely) ortonormált bázist ortonormáltba visz;
(4) f valamely ortonormált bázisban felírt mátrixában az oszlopok ortonormált rendszert alkotnak;
(5) f valamely ortonormált bázisban felírt mátrixában az oszlopok ortonormált rendszert alkotnak.

Bizonyítás. (1) $\Rightarrow$ (2): $\mathcal{B}$ ortonormált bázis, $A = [f]_{\mathcal{B}}$ unitér, $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ koordinátavektorok $\Rightarrow$ a skalárszorzatuk $\mathbf{x}^*\mathbf{y}$. Ekkor $(A\mathbf{x})^*(A\mathbf{y}) = \mathbf{x}^*A^*A\mathbf{y} = \mathbf{x}^*I\mathbf{y} = \mathbf{x}^*\mathbf{y}$.

(2) $\Rightarrow$ (3): Nyilvánvaló.

(3) $\Rightarrow$ (4): (3) miatt van $\mathcal{B} = \{ \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n \}$ ortonormált, hogy $\{ f(\mathbf{b}_1), \ldots, f(\mathbf{b}_n) \}$ is ortonormált, és így az ortonormált $\mathcal{B}$ bázisban felírt koordinátavektoraik, azaz A oszlopai is ortonormáltak.

(4) $\Rightarrow$ (1): $A = [f]_{\mathcal{B}}$ oszlopai ortonormáltak $\Rightarrow A^*A = I$, mert a szorzat ij eleme éppen A i. és j. oszlopának skalárszorzata. Tehát $A^* = A^{-1}$, azaz f unitér.

(4) $\Leftrightarrow$ (5): A oszlopai ortonormált rendszert alkotnak $\Leftrightarrow A^*A = I \Leftrightarrow AA^* = I \Leftrightarrow A$ sorai ortonormált rendszert alkotnak. $\square$

Következmény. f unitér, önadjungált, illetve normális $\Leftrightarrow$ minden ortonormális bázisban ilyen.

Bizonyítás. $\Leftarrow$: A definícióból következik.

$\Rightarrow$: Legyen A az f mátrixa egy olyan ortonormált bázisban, amelyben a mátrixa unitér, önadjungált, illetve normális. Egy másik ortonormált bázisra való áttérés mátrixa legyen P, tehát az új mátrix $P^{-1}AP$. Az előző tétel szerint P unitér, azaz $P^* = P^{-1}$. Így a * és a P-vel való konjugálás művelete felcserélhető: $(P^{-1}AP)^* = (P^*AP)^* = P^*A^*P = P^{-1}A^*P$.

Így ha A unitér, akkor $(P^{-1}AP)^*(P^{-1}AP) = P^{-1}A^*PP^{-1}AP = P^{-1}A^*AP = P^{-1}P = I$;

ha A önadjungált, akkor $(P^{-1}AP)^* = P^{-1}A^*P = P^{-1}AP$;

és ha A normális, akkor $(P^{-1}AP)^*(P^{-1}AP) = P^{-1}A^*PP^{-1}AP = P^{-1}A^*AP = P^{-1}AA^*P = P^{-1}APP^{-1}A^*P = (P^{-1}AP)(P^{-1}AP)^*$. $\square$

Pl.: Az $y = x$-re való tükrözés mátrixa

$\mathbb{R}^2$ standard (ortonormált) bázisában $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, ami ortogonális (unitér), tehát a transzformáció maga ortogonális (ez egyébként következik abból is, hogy egybevágóság).

De ugyanennek a transzformációnak a mátrixa a $\mathcal{B} = \{(1,0),(1,1)\}$ nem ortonormált bázisban $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, nem ortogonális.

A $\mathcal{C} = \{(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}), (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})\}$ ortonormált bázisban $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, megint ortogonális.

Állítás. Ⓑ
Ha A unitér $\Rightarrow \forall\lambda$ sajátértékre $|\lambda| = 1$.
Ha A önadjungált $\Rightarrow \forall\lambda$ sajátértékre $\lambda \in \mathbb{R}$.

Bizonyítás. Ha A unitér, akkor $A^* = A * -1$, és $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, $(\mathbf{x} \neq \mathbf{0})$ esetén
$(A\mathbf{x})^*(A\mathbf{x}) = \mathbf{x}^*A^*A\mathbf{x} = \mathbf{x}^*\mathbf{x} = |\mathbf{x}|^2$, és
$(A\mathbf{x})^*(A\mathbf{x}) = (\lambda\mathbf{x})^*(\lambda\mathbf{x}) = \overline{\lambda}\lambda|\mathbf{x}|^2 = |\lambda|^2|\mathbf{x}|^2$,
tehát $|\mathbf{x}| \neq 0$ miatt $|\lambda|^2 = 1$, azaz $|\lambda| = 1$.
Az önadjungált esetet már bizonyítottuk a definitség jellemzésénél, de a teljesség kedvéért itt is megismételjük.
Ha A önadjungált, azaz $A^* = A$, és λ sajátértéke A-nak, $\mathbf{0} \neq \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ pedig egy hozzá tartozó sajátvektor, akkor
$\mathbf{v}^*A\mathbf{v} = \mathbf{v}^*\lambda\mathbf{v} = \lambda|\mathbf{v}|^2$, és $\mathbf{v}^*A\mathbf{v} = \mathbf{v}^*A^*\mathbf{v} = (A\mathbf{v})^*\mathbf{v} = (\lambda\mathbf{v})^*\mathbf{v} = \overline{\lambda}|\mathbf{v}|^2$,
tehát $|\mathbf{v}| \neq \mathbf{0}$ miatt $\lambda = \overline{\lambda}$.

$\square$