Tétel (Schur-felbontás). Ⓑ $\forall A \in \mathbb{C}^{n\times n}$-hez $\exists U$ unitér: $U^{-1}AU$ felső háromszögmátrix.

Bizonyítás. n-re vonatkozó teljes indukcióval. $n = 1$-re nyilvánvaló.
$\exists \mathcal{B} = \{\mathbf{v}, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ ortonormált bázis, hogy $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ (A-nak van sajátvektora, ezt normáljuk, és $\langle \mathbf{v} \rangle^{\perp}$-nek vesszük egy ortonormált bázisát). Legyen P az áttérés mátrixa.

$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda & | & * \\ - & & - \\ 0 & | & A_1 \end{bmatrix}$. Indukciós feltevés miatt $\exists Q_1$ unitér: $Q_1^{-1}A_1Q_1$ felső $\triangle$.

Ekkor $Q = \begin{bmatrix} 1 & | & 0 \\ - & & - \\ 0 & | & Q_1 \end{bmatrix}$ is unitér, és $Q^{-1}(P^{-1}AP)Q = \begin{bmatrix} \lambda & | & * \\ - & & - \\ 0 & | & Q_1^{-1}A_1Q_1 \end{bmatrix}$ felső háromszögmátrix. Azt kaptuk, hogy $(PQ)^{-1}A(PQ)$ felső $\triangle$, és $U := PQ$ unitér, mert unitérek szorzata is az (ugyanis skalárszorzattartók kompozíciója is skalárszorzattartó).

□

Tétel (Spektráltétel). Egy $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mátrixra ekvivalens:
(*i*) A normális;
(*ii*) $\exists$ A sajátvektoraiból álló ortonormált bázis $\mathbb{C}^n$-ben;
(*iii*) $\exists$ U unitér: $U^{-1}AU$ diagonális.

Bizonyítás. (*ii*) $\Leftrightarrow$ (*iii*):
U unitér $\Leftrightarrow$ U oszlopai ortonormáltak
$U^{-1}AU$ diagonális $\Leftrightarrow$ U oszlopai sajátvektorai A-nak

(*iii*) $\Rightarrow$ (*i*): a $D := U^{-1}AU$ diagonális mátrix nyilván normális, és mivel U unitér, $A = UDU^{-1}$ is normális.

(*i*) $\Rightarrow$ (*iii*): $\exists U$ unitér: $B = U^{-1}AU$ felső háromszögmátrix (a Schur-felbontás miatt), és A normális $\Rightarrow$ B normális.

Lemma B normális és felső $\triangle$ $\Leftrightarrow$ B diagonális.
Bizonyítás: $\Leftarrow$: Nyilván.
$\Rightarrow$: Teljes indukció n-re. $n = 1$-re igaz.

$B = \begin{bmatrix} a & | & \mathbf{b}^* \\ - & & -- \\ \mathbf{0} & | & C \end{bmatrix}$, $B^* = \begin{bmatrix} \overline{a} & | & \mathbf{0}^* \\ - & & -- \\ \mathbf{b} & | & C^* \end{bmatrix}$. C felső $\triangle$

$BB^* = \begin{bmatrix} |a|^2 + \mathbf{b}^*\mathbf{b} & | & \mathbf{b}^*C^* \\ ---- & & --- \\ C\mathbf{b} & | & CC^* \end{bmatrix}$, $B^*B = \begin{bmatrix} |a|^2 & | & \overline{a}\mathbf{b}^* \\ --- & & ---- \\ a\mathbf{b} & | & \mathbf{b}\mathbf{b}^* + C^*C \end{bmatrix}$

$B^*B = BB^* \Rightarrow |a|^2 + \mathbf{b}^*\mathbf{b} = |a|^2 \Rightarrow \mathbf{b} = \mathbf{0} \Rightarrow CC^* = C^*C$, azaz C normális $\triangle$ $\Rightarrow$ az indukciós feltevés miatt C diagonális $\Rightarrow$ B diagonális.

A lemma miatt B diagonális. □

Következmény. Normális mátrix egyszerre diagonalizálható transzformáció mátrixaként és bilineáris függvény Gram-mátrixaként (ugyanis U unitérre $U^{-1}AU = U^*AU$).

Tétel (Főtengelytétel). $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$-re ekvivalens:
(*i*) A önadjungált (valós esetben szimmetrikus);
(*ii*) $\exists$ U unitér: $U^{-1}AU$ valós diagonális.

Bizonyítás. $(ii) \Rightarrow (i)$: $U^{-1}AU$ valós diagonális $\Rightarrow$ önadjungált $\Rightarrow$ A is önadjungált, mert U unitér.

$(i) \Rightarrow (ii)$: A spektráltétel miatt $\exists U$ unitér: $U^{-1}AU$ diagonális, és A önadjungáltsága miatt a diagonális alak átlójában levő sajátértékek mind valósak. $\square$

Megjegyzés. Ha $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, akkor valós unitér (azaz ortogonális) U is létezik.

Következmény. A definitség vizsgálatánál $\exists$ olyan diagonális mátrixa a bilineáris függvénynek, amelynek az átlójában a sajátértékek vannak, és ez bizonyítja a háromoszlopos tételben a 2. és 3. oszlop feltételeinek az ekvivalenciáját.

Példák önadjungált és unitér transzformációkra

Láttuk, hogy V euklideszi térben $\forall W \leq V$-re $V = W \oplus W^\perp$. Legyen

W ortonormált bázisa $\mathcal{B}_1 \longleftarrow$ az U_1 mátrix oszlopai

$W^\perp$ ortonormált bázisa $\mathcal{B}_2 \longleftarrow$ az U_2 mátrix oszlopai

$\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ ortonormált bázis V-ben $\Rightarrow U := [U_1|U_2]$ unitér

1. π_W a W-re való **merőleges vetítés**

$$\begin{aligned} \pi_W :& W \oplus W^\perp \to W \\ & w + w' \mapsto w \end{aligned} \qquad \Rightarrow \qquad [\pi_W]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ha π_W standard mátrixa $A \Rightarrow [\pi_W]_{\mathcal{B}} = U^{-1}AU \Rightarrow A = U \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^{-1} = U \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^*$.

$$\begin{array}{ccc} & \left[\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] & \left[\begin{array}{c} U_1^* \\ \hline U_2^* \end{array}\right] \\ [\,U_1 \mid U_2\,] & [\,U_1 \mid 0\,] & [\,U_1U_1^*\,] \end{array} \qquad \Rightarrow \qquad A = U_1U_1^*$$

Hogy hat A a V vektorain?

$$U_1U_1^*\mathbf{v} = [\,\mathbf{b}_1 \quad \dots \quad \mathbf{b}_k\,] \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1^* \\ -- \\ \vdots \\ -- \\ \mathbf{b}_k^* \end{bmatrix} \mathbf{v} = [\,\mathbf{b}_1 \quad \dots \quad \mathbf{b}_k\,] \cdot \begin{bmatrix} \langle\,\mathbf{b}_1, \mathbf{v}\,\rangle \\ --- \\ \vdots \\ --- \\ \langle\,\mathbf{b}_k, \mathbf{v}\,\rangle \end{bmatrix} = \sum \langle\,\mathbf{b}_i, \mathbf{v}\,\rangle\,\mathbf{b}_i,$$

mint a Gram–Schmidt-ortogonalizációnál.

π_W önadjungált, mert a $\mathcal{B}$ ortonormált bázisban az.

Pozitív szemidefinit, mert spektruma $\{\,0, 1\,\}$ (ami az $\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ alakból látszik).

Ha $W^\perp$ bázisát könnyebb felírni:

$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = I_n - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$, azaz $\pi_W = id - \pi_{W^\perp}$, és a standard mátrixa $A = I - U_2U_2^*$.

Állítás. $\pi_W(\mathbf{v})$ a W-ben a $\mathbf{v}$-hez legközelebbi vektor, azaz az egyetlen, amelyre $|\mathbf{v} - \pi_W(\mathbf{v})| = \min\{\,|\mathbf{v} - \mathbf{w}| \mid \mathbf{w} \in W\,\}$.

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{v} = \pi(\mathbf{v}) + \mathbf{v}'$, ahol $\mathbf{v}' \in W^\perp$. Ekkor $\mathbf{w} \in W$-re $|\mathbf{v} - \mathbf{w}|^2 = \langle \mathbf{v} - \mathbf{w}, \mathbf{v} - \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v}' + \pi(\mathbf{v}) - \mathbf{w}, \mathbf{v}' + \pi(\mathbf{v}) - \mathbf{w} \rangle = |\mathbf{v}'|^2 + |\pi(\mathbf{v}) - \mathbf{w}|^2 \geq |\mathbf{v}'|^2 = |\mathbf{v} - \pi(\mathbf{v})|^2$, és $=$ csak akkor áll fenn, ha $|\pi(\mathbf{v}) - \mathbf{w}|^2 = 0$, azaz $\mathbf{w} = \pi(\mathbf{v})$.

Speciális eset: Ha $W^\perp$ 1-dimenziós: $W^\perp = \langle \mathbf{n} \rangle$ (hipersík normálvektora $\mathbf{n}$), akkor $W^\perp$ ortonormált bázisa $\{ \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|} \}$, és

π_W mátrixa: $$I - \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|}\left(\frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|}\right)^* = I - \frac{1}{|\mathbf{n}|^2}\mathbf{n}\mathbf{n}^* = I - \frac{\mathbf{n}\mathbf{n}^*}{\mathbf{n}^*\mathbf{n}}.$$

Pl.: Határozzuk meg a $2x - 3y + z = 0$ síkra való merőleges vetítés mátrixát!
$\mathbf{n} = (2, -3, 1)$ a sík normálvektora.

$$I - \tfrac{1}{14}\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} = I - \tfrac{1}{14}\begin{bmatrix} 4 & -6 & 2 \\ -6 & 9 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} = \tfrac{1}{14}\begin{bmatrix} 10 & 6 & -2 \\ 6 & 5 & 3 \\ -2 & 3 & 13 \end{bmatrix}.$$

2. τ_W a W-re való **tükrözés**:

$$[\tau_W]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - I_n = I_n - 2 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \tau_W = 2\pi_W - \mathrm{id} = \mathrm{id} - 2\pi_{W^\perp}$

Pl.: Hipersíkra való tükrözés mátrixa: $I - 2 \cdot \dfrac{\mathbf{n}\mathbf{n}^*}{\mathbf{n}^*\mathbf{n}}$

τ_W unitér (valós esetben ortogonális), önadjungált, indefinit, mert $\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}$ ilyen. Spektruma $\{ 1, -1 \}$.

3. Minden **permutációs mátrix** unitér.
Permutációs mátrix az olyan négyzetes mátrix, amelynek minden sorában és minden oszlopában egyetlen 1 van, a többi eleme 0 (azaz a báziselemeket permutálja).

Ezekre igaz: $\exists m : A^m = I \Rightarrow m_A(x) \mid x^m - 1 \Rightarrow \forall$ sajátérték m-edik egységgyök, és A diagonalizálható.

Pl.: $A = \left[\begin{array}{cc|ccc} 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & & & \\ \hline & & 0 & 0 & 1 \\ & & 1 & 0 & 0 \\ & & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow A^6 = I$, és kisebb hatvány nem I, de $m_A(x) = (x-1)(x+1)(x^2+x+1)$ csak 4-edfokú.

Speciálisan legyen A az n báziselemet ciklikusan permutáló mátrix: $\mathbf{b}_n \mapsto \mathbf{b}_{n-1} \mapsto \cdots \mapsto \mathbf{b}_1 \mapsto \mathbf{b}_n$. A mátrixa: $A = \begin{bmatrix} & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ 1 & & & 0 \end{bmatrix}$, $k_A(x) = (-1)^n(x^n - 1)$. Minden gyök egyszeres $\Rightarrow m_A(x) = x^n - 1$.

A sajátértékek $1, \omega, \ldots, \omega^{n-1}$, ahol $\omega = e^{2\pi i/n}$ primitív n-edik egységgyök.

$A\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ x_1 \end{bmatrix}$. Az ω^k-hoz tartozó sajátvektor $\begin{bmatrix} 1 \\ \omega^k \\ \vdots \\ \omega^{(n-1)k} \end{bmatrix}$.

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \dots & \\ 1 & \omega^2 & \vdots & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \omega^{n-1} & \omega^{2(n-1)} & \dots & \omega^{(n-1)^2} \end{bmatrix}$$ az áttérés mátrixa.

($V(1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1})$ Vandermonde-mátrix.)
Oszlopai ortogonálisak, és $U' = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot U$ unitér. $U'^* A U' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ & \omega & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \omega^{n-1} \end{bmatrix}$.