Diszkrét Fourier-transzformált

Polinominterpoláció:

Véges sok fv.-értékhez keresünk (kis fokú) polinomot.
n értékhez n darab x-hatvány $(1, x, \dots, x^{n-1})$ lineáris kombinációját.

Diszkrét Fourier-transzformált:

Periodikus fv.-t (sin és cos fv.-ek összegét) illesztünk véges sok fv.-értékre (pl. hanghullámok lebontása tiszta hangok összegére). Nem pontos, mint a Fourier-sor, de jól közelít, ha az eredeti függvény periodikus.

A függvényértékeket a perióduson egyenlő távolságban mérjük.
Az egyszerűség kedvéért legyen 2π a periódus.
$x_0, x_1, \dots, x_{N-1}$ a függvényértékek a $0, \frac{2\pi}{N}, 2 \cdot \frac{2\pi}{N}, \dots, (N-1) \cdot \frac{2\pi}{N}$ helyen.

Kell: $X_0, \dots, X_{N-1}$:

$$g(x) = \sum_{n=0}^{N-1} X_n e^{inx} = \sum_{n=0}^{N-1} (a_n + ib_n)(\cos(nx) + i\sin(nx)), \text{ ha } X_n = a_n + ib_n$$

$$\left(\text{valós része } \sum_{n=0}^{N-1} a_n \cos(nx) - b_n \sin(nx), \text{ egy Fourier-sor kezdőszelete}\right)$$

úgy, hogy $x_k = g(k \cdot \frac{2\pi}{N}) = \sum_{n=0}^{N-1} X_n e^{\frac{2\pi i}{N} \cdot nk}$:

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{bmatrix} = U \begin{bmatrix} X_0 \\ \vdots \\ X_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{array}{cc} & n \\ k & \begin{bmatrix} \dots & \begin{matrix} \vdots \\ e^{\frac{2\pi i}{N} nk} \\ \vdots \end{matrix} & \dots \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} X_0 \\ \vdots \\ X_{N-1} \end{bmatrix},$$

és ez az U éppen a ciklikus permutációs mátrixot diagonalizáló unitér mátrix. $\Rightarrow$ könnyű invertálni ($\frac{1}{\sqrt{N}} U$ unitér $\Rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{N}} U\right)^{-1} = \frac{1}{\sqrt{N}} U^* \Rightarrow U^{-1} = \frac{1}{N} U^*$), és így ebből az $\mathbf{X}$-et kiszámítani:

$$\begin{bmatrix} X_0 \\ \vdots \\ X_{N-1} \end{bmatrix} = \frac{1}{N} \cdot \begin{array}{cc} & k \\ n & \begin{bmatrix} \dots & \begin{matrix} \vdots \\ e^{-\frac{2\pi i}{N} nk} \\ \vdots \end{matrix} & \dots \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{bmatrix}, \quad \text{azaz} \quad X_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-\frac{2\pi i}{N} nk}.$$

Mátrixok általánosított inverze

Def. $A \in K^{m \times n}$
$B \in K^{n \times m}$ **jobb inverze** A-nak, ha $AB = I_m$.
$C \in K^{n \times m}$ **bal inverze** A-nak, ha $CA = I_n$.

Ha A négyzetes, akkor

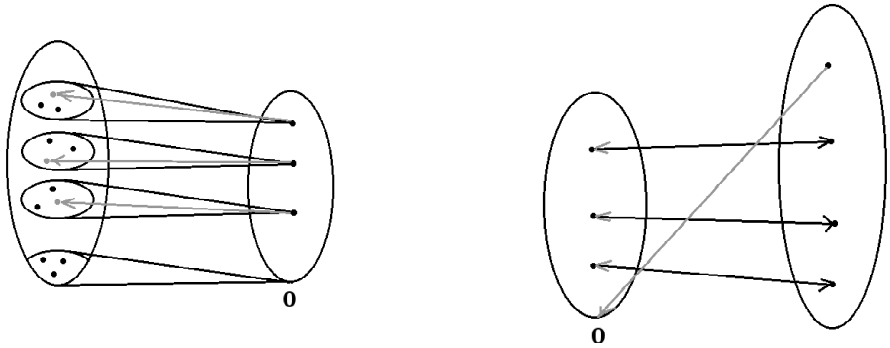
A jobb inverze bal inverz is, és így $= A^{-1}$
A bal inverze jobb inverz is, és így $= A^{-1}$

Ha A nem négyzetes, akkor legföljebb jobb vagy bal inverze lehet, de nem mindkettő, és az nem is egyértelmű.

Állítás. $A \in K^{m\times n}$-re
1) A-nak $\exists$ jobb inverze $\Leftrightarrow$ $\operatorname{rang} A = m$.
2) A-nak $\exists$ bal inverze $\Leftrightarrow$ $\operatorname{rang} A = n$.

Bizonyítás. 1) $\Rightarrow$: $m = \operatorname{rang} I_m = \operatorname{rang} AB \le \operatorname{rang} A_{n\times m} \le m \Rightarrow$ végig $=$.
$\Leftarrow$: $A : K^n \to K^m$ szürjektív $\Rightarrow K^m$ egy bázisában, $\mathcal{C}$-ben megadható egy $B : K^m \to K^n$, $\mathbf{c}_i \to \mathbf{b}_i$ leképezés, hogy $A\mathbf{b}_i = \mathbf{c}_i$ (tehát minden báziselemhez hozzárendeljük az egyik "ősképét "). Ekkor $AB\mathbf{c}_i = A\mathbf{b}_i = \mathbf{c}_i$ $\forall \mathbf{c}_i \Rightarrow AB = I$.

2) $\Rightarrow$: $n = \operatorname{rang} I_n = \operatorname{rang} BA \le \operatorname{rang} A_{n\times m} \le n \Rightarrow$ végig $=$.
$\Leftarrow$: $\operatorname{rang} A = n \Rightarrow$ az $A : K^n \to K^m$ leképezésre a dimenziótétel szerint $n = \dim \operatorname{Ker} A + \dim \operatorname{Im} A = \dim \operatorname{Ker} A + \operatorname{rang} A = \dim \operatorname{Ker} A + n$, így $\operatorname{Ker} A = 0$, azaz A injektív. Ebből következik, hogy K^n egy bázisának, $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$-nek a képe A-nál ($\mathbf{c}_i = A\mathbf{b}_i$, ha $i \le n$) szintén független. Egészítsük ki ezt egy $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_n, \dots, \mathbf{c}_m\}$ bázissá K^m-ben, és definiáljuk C-t úgy, hogy $C\mathbf{c}_i = \mathbf{b}_i$, ha $i \le n$, és $\mathbf{0}$ különben. Ekkor $CA\mathbf{b}_i = C\mathbf{c}_i = \mathbf{b}_i$ ($i \le n$), tehát $CA = I$.



□

Egyoldali inverz kiszámítása:

Gauss-módszerrel (szimultán egyenletrendszerek megoldása):
$AB = I,\ \ B = ?$
$[A|I] \mapsto\mapsto \cdots \mapsto [\text{redukált lépcsős}|B']$.

(Ha csak egy megoldás kell, akkor B-t megkaphatjuk úgy, hogy a B'-be $\mathbf{0}$ sorokat illesztünk a szabad változóknak megfelelő sorszámú helyekre. Az általános megoldást a szimultán egyenletrendszer megoldásainak paraméteres felírásával kapjuk.)

Pl.: $\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & -2 & 1 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 0 & 1/7 & 3/7 \\ 0 & 0 & 1 & 2/7 & -1/7 \end{array}\right]$

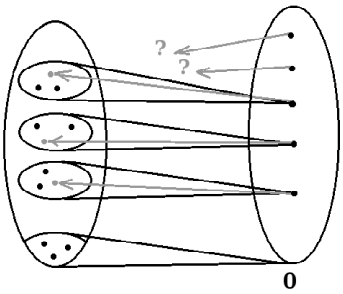
$B = \begin{bmatrix} 1/7 & 3/7 \\ 0 & 0 \\ 2/7 & -1/7 \end{bmatrix}$ megfelel.

$CA = I,\ \ C = ?$ helyett az $A^T C^T = I$ egyenletet oldjuk meg.

Def. $A \in K^{m\times n}$ **teljes rangú**, ha A rangja az m és n minimuma.

Ha A nem teljes rangú, akkor nincs egyoldali inverze, de van általánosított inverze:

Def. A' az A-nak **általánosított inverze**, ha $AA'A = A$ (azaz $AA'|_{\operatorname{Im} A} = \mathrm{id}_{\operatorname{Im} A}$).



$\operatorname{Im} A$ egy bázisa $\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_k$
$A' : \mathbf{c}_i \mapsto \mathbf{b}_i$, ahol $\mathbf{b}_i \in K^n$ tetszőleges olyan,
amelyre $A\mathbf{b}_i = \mathbf{c}_i$ (egy-egy ősképet választunk)
Ez kiterjeszthető K^m-re lineárisan,
mert $\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_k$ függetlenek

Megjegyzés.

$$\begin{array}{l} AB = I \Rightarrow ABA = A \\ CA = I \Rightarrow ACA = A \end{array} \quad \Rightarrow \quad \text{Az egyoldali inverz általánosított inverz}$$

Általánosított inverz kiszámítása

$A \in K^{m\times n} \Rightarrow \exists S \in K^{m\times n}$, $P \in K^{n\times m}$ invertálhatók, hogy $SAP = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} =: D$, ahol $r = \operatorname{rang} A$ (ld. az 1. feladatsort).

Tétel. A fenti jelöléssel
A' általánosított inverze A-nak $\Leftrightarrow A' = PD'S$ valamely $D' = \begin{bmatrix} I_r & X \\ Y & Z \end{bmatrix}_{n\times m}$ mátrixra.
Speciálisan PD^TS általánosított inverz.

Bizonyítás. $A = AA'A \;\Leftrightarrow\; SAP = SAPP^{-1}A'S^{-1}SAP$

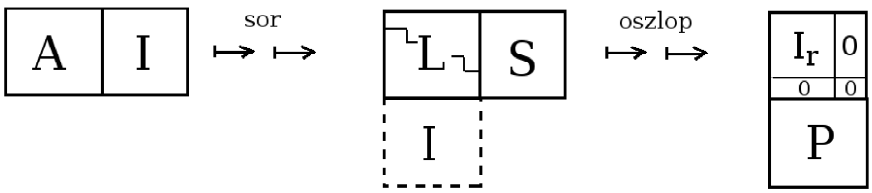
Ha $P^{-1}A'S^{-1} = \begin{bmatrix} W_{r\times r} & X \\ Y & Z \end{bmatrix}_{n\times m}$, akkor

$$SAPP^{-1}A'S^{-1}SAP = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{m\times n} \cdot \begin{bmatrix} W_{r\times r} & X \\ Y & Z \end{bmatrix}_{n\times m} \cdot \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{m\times n} = \begin{bmatrix} W_{r\times r} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{n\times m}.$$

Tehát $A = AA'A \Leftrightarrow W = I_r$ a $P^{-1}A'S^{-1}$ előállításában, azaz ha $A' = P\begin{bmatrix} I_r & X \\ Y & Z \end{bmatrix}S$ alakú. □

Megjegyzés. 1. Az előbbi tételben $\operatorname{rang} A' = \operatorname{rang} D' \geq r$, mert P és S invertálhatók.
2. Ha A teljes rangú mátrix, akkor A' szükségképpen egyoldali inverz (ld. a 4. feladatsort)

Gauss-módszerrel:



Pl.: Keressük meg az $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -4 & 2 \end{bmatrix}$ valamelyik általánosított inverzét!

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -4 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Így $S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ és $P = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Az A mátrix lépcsős alakjából láthatjuk, hogy $r = \operatorname{rang}(A) = 1$, így D' bármilyen 3×2-es mátrix lehet, amelynek a bal felső eleme 1. Legyen például $D' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. Ekkor $A' = PD'S = \begin{bmatrix} 9 & 2 \\ -1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$. (Ellenőrizzük!)

Tétel. Ha az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ egyenletrendszernek van megoldása, és A' az A egy általánosított inverze, akkor az $A'\mathbf{b}$ is megoldás.

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{x}_0$ egy megoldás. Ekkor $A\mathbf{x}_0 = \mathbf{b}$. Így $A(A'\mathbf{b}) = AA'A\mathbf{x}_0 = A\mathbf{x}_0 = \mathbf{b}$, tehát $A'\mathbf{b}$ is megoldás. □

Megjegyzés. Akkor jó ezt alkalmazni, ha sok különböző $\mathbf{b}$-re kell megoldani ugyanazt az egyenletrendszert, és A nem invertálható (ha A invertálható, akkor $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$ az egyetlen megoldás). Viszont ellenőrizni kell, hogy $A'\mathbf{b}$ valóban megoldás-e. Ha nem, akkor nincs megoldás.