Tétel (SVD). Minden $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ mátrixhoz $\exists M' \in \mathbb{C}^{m\times m}$ és $M \in \mathbb{C}^{n\times n}$ unitér, hogy $A = M'\Sigma' M^*$, ahol $\Sigma' = \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $m \times n$-es blokkmátrix, és a Σ $r \times r$-es diagonális mátrix átlójában az A mátrix $\sigma_1 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$ szinguláris értékei állnak.

Bizonyítás (és kiszámítás). A^*A önadjungált, pozitív szemidefinit $\Rightarrow$

$$\exists M \in \mathbb{C}^{n\times n} \text{ unitér: } M^*(A^*A)M = \begin{bmatrix} \Sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(Tehát M oszlopai az A^*A ortonormált bázist alkotó sajátvektorai – ha valamelyik sajátaltér 1-nél nagyobb dimenziós, akkor ortogonalizálni kell – a sajátértékek csökkenő sorrendjében, Σ-ban pedig ezeknek a sajátértékeknek a négyzetgyökei állnak.)

$$M^*(A^*A)M = (AM)^*(AM) \text{ diagonális} \quad \Rightarrow$$

$$AM \text{ oszlopai ortogonálisak: } AM = [T|0],$$

ahol T oszlopainak abszolút értéke rendre $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$.

Ha ezeket lenormáljuk, és a kapott $T' = T\Sigma^{-1}$ mátrix oszlopait kiegészítjük ortonormált bázissá $\mathbb{C}^n$-ben, akkor egy

$$M' = [T'|T_1]_{n\times n}$$

unitér mátrixot kapunk. Ezzel:

$$(M')^*AM = \begin{bmatrix} T'^* \\ T_1^* \end{bmatrix} [\,T \quad 0\,] = \begin{bmatrix} T'^*T & 0 \\ T_1^*T & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \Sigma'$$

ugyanis $T'^*T = (\Sigma^{-1})^*T^*T = \Sigma^{-1}\Sigma^2 = \Sigma$, továbbá T_1 és T oszlopai merőlegesek egymásra.
Így $A = M'\Sigma' M^*$.

Tétel (Redukált SVD). Minden $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ mátrixhoz $\exists U' \in \mathbb{C}^{m\times r}$ és $U \in \mathbb{C}^{n\times r}$ ortonormált oszlopú mátrixok, amelyekre $A = U'\Sigma U^*$, ahol Σ az a diagonális mátrix, amelynek átlójában az A mátrix $\sigma_1 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$ szinguláris értékei állnak.

Bizonyítás. Álljon U és U' az SVD-tételbeli M, illetve M' első r oszlopából. Tehát

$$M = [U|M_1], \quad M' = [U'|M_1'],$$

és ekkor az SVD-tétel szerint

$$A = M'\Sigma' M^* = [\,U' \quad M_1'\,] \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U^* \\ M_1^* \end{bmatrix} = [\,U'\Sigma \quad 0\,] \begin{bmatrix} U^* \\ M_1^* \end{bmatrix} = U'\Sigma U^*. \qquad \square$$

Az SVD kiszámítását követve U-t úgy kaphatjuk meg, hogy A^*A első r (ortonormált rendszert alkotó) sajátvektorát írjuk az oszlopaiba, U'-t pedig az AU oszlopainak normálásával kapjuk (ez ugyanaz, mint az AM első r, azaz a nem nulla oszlopainak a normáltja).

Pl.: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$, $A^*A = \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 20 \end{bmatrix}$, $k_{A^*A}(x) = x^2 - 25x = x(x-25)$, $\lambda_1 = 25$, $\lambda_2 = 0$, $\sigma_1 = 5$, $\Sigma = [5]$, $\Sigma' = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

A^*A sajátvekora λ_1-hez: $\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$, normálva $\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$.

A^*A sajátvekora λ_2-höz: $\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}$, normálva $\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}$.

$M = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}1 & -2\\2 & 1\end{bmatrix}$, $AM = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}5 & 0\\-10 & 0\end{bmatrix}$, $M' = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}1 & 2\\-2 & 1\end{bmatrix}$.

$A = M'AM^* = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}1 & 2\\-2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}1 & 2\\-2 & 1\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}[5]\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}$

Megjegyzés. Ha $A = M'D'M^*$ valamely M, M' unitér mátrixokkal és D valós, nemnegatív diagonális mátrixszal, amelynek átlós elemei csökkenő sorrendben következnek, akkor ez a felbontás szükségképpen SVD, azaz $D' = \Sigma'$. Ugyanígy, ha $A = U'DU^*$, ahol U és U' oszlopai ortonormáltak, és D valós, invertálható, diagonális mátrix, az átlójában pozitív, csökkenő elemekkel, akkor ez a felbontás redukát SVD, azaz $D = \Sigma$.

Megjegyzés. Ha $m < n$, akkor egyszerűbb A^* SVD-felbontását kiszámítani, mert AA^* csak $m \times m$-es, míg A^*A $n \times n$-es, és az $A^* = M'\Sigma'M^*$ felbontásból $A = M\Sigma'^*M'^*$ is SVD-felbontás az előző megjegyzés miatt.

Az SVD alkalmazásai

Legyen $A = M'\Sigma'M^* = U'\Sigma U^*$ az A SVD, illetve redukált SVD-felbontása.

1) Poláris felbontás ($A \in \mathbb{C}^{n\times n}$-re):
   $A = PQ$, ahol P pozitív szemidefinit, és Q unitér:
   $$A = M'\Sigma'M^* = M'\Sigma'(M'^*M')M^* = (M'\Sigma'M'^*)(M'M^*),$$
   ahol $P = M'\Sigma'M'^*$ pozitív szemidefinit, mert Σ' az, és $Q = M'M^*$ unitér, mert két unitér szorzata.

2) Pszeudoinverz újabb kiszámítási módja:
   $$A = U'\Sigma U^* \;\Rightarrow\; A^+ = U\Sigma^{-1}(U')^*$$
   (Ugyanis U' és U^* pszeudoinverze a *-a, és U', Σ, U^* mindegyike teljes rangú.)

3) $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ legjobb közelítő megoldása az egységkörön ($|\mathbf{x}| = 1$):
   $\mathbf{x}$ az M utolsó oszlopa, a hiba σ_n ($= 0$, ha $r < n$), azaz $A\mathbf{x} = \sigma_n$.

   Biz.: M inv.-ható $\Rightarrow \forall\mathbf{x}$-hez van $\mathbf{y}$, hogy $\mathbf{x} = M\mathbf{y}$, és mivel M unitér, $|\mathbf{y}| = 1$.
   $$A\mathbf{x} = AM\mathbf{y} \Rightarrow |A\mathbf{x}|^2 = (AM\mathbf{y})^*(AM\mathbf{y}) = \mathbf{y}^*M^*A^*AM\mathbf{y} =$$
   $$\mathbf{y}^*(\Sigma')^*\Sigma'\mathbf{y} = |\Sigma'\mathbf{y}|^2 = \sum_i \sigma_i^2|y_i|^2 \geq \sigma_n^2\sum_i |y_i|^2 = \sigma_n^2,$$
   és ha $\mathbf{y} = \mathbf{e}_n$, akkor $=$ van.

4) Alacsony rangú közelítés (Eckart–Young-tétel)
   $k \leq r$-re $A^{(k)} = U'^{(k)}\Sigma^{(k)}(U^{(k)})^*$ k rangú közelítés, ahol
   $U'^{(k)}$ az U' első k oszlopa,
   $\Sigma^{(k)}$ a Σ bal felső $k \times k$-as részmátrixa,
   $U^{(k)}$ az U első k oszlopa.
   Ekkor a hiba $||A - A^{(k)}|| = \sqrt{\sum_{i=k+1}^{r} \sigma_i^2}$.

(Egy A mátrixra $||A|| = \sqrt{\sum_{i,j} |a_{ij}|^2}$.)

Ennek egy alkalmazása: LSI (mögöttes szemantikájú indexelés) (később)

Nemnegatív mátrixok

Def. $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$

pozitív mátrix, ha $\forall a_{ij} > 0$ (jele: $A > 0$);
nemnegatív mátrix, ha $\forall a_{ij} \geq 0$ (jele: $A \geq 0$).

$A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$-re $\begin{matrix} A \geq B \\ A > B \end{matrix}$, ha $\begin{matrix} A - B \geq 0 \\ A - B > 0 \end{matrix}$.

Def. $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ **spektrálsugara** $\rho(A) = \max\{\, |\lambda| \mid \lambda$ sajátértéke A-nak $\}$.

Tétel (Perron-tétel). Pozitív mátrixokra:
1) $\rho(A)$ maga is sajátérték,
2) 1-dimenziós sajátaltérrel, amelyet egy pozitív vektor generál.
3) Ha λ sajátérték, és $|\lambda| = \rho(A) \Rightarrow \lambda = \rho(A)$.

Bizonyítás. Később.

A tétel általánosítható bizonyos nemnegatív mátrixokra is (Frobenius-tétel).

Irreducibilis mátrixok

Def. $A \geq 0$ $n\times n$-es mátrix **reducibilis**, ha a sorok és oszlopok szimultán permutációjával (azaz egy permutációs mátrixszal való konjugálással) valódi blokk-$\triangle$ alakra hozható:

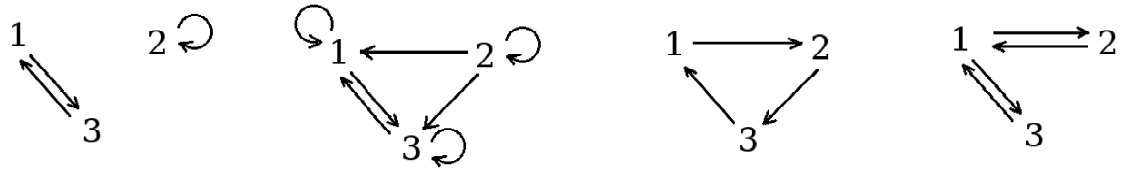
$$P^{-1}AP = P^TAP = \begin{bmatrix} * & * \\ 0 & * \end{bmatrix}.$$

Ekvivalens megfogalmazás:

Legyen G_A irányított gráf $\{1, 2, \ldots, n\}$-en: $i \to j$, ha $a_{ij} > 0$. Ekkor
A **reducibilis** $\Leftrightarrow$ $\{1, \ldots, n\}$-nek $\exists$ valódi részhalmaza, amelyből nem megy él kifelé.

Def. A **irreducibilis**, ha nem reducibilis, azaz, ha a gráfja erősen összefüggő ($\forall$ csúcsból $\forall$ csúcsba el lehet jutni irányított úton).

Pl.: $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$



reducibilis $\{1, 3\} \not\to \{2\}$, $\{1, 3\} \not\leftarrow \{2\}$ — reducibilis $\{1, 3\} \not\to \{2\}$ — irreducibilis — irreducibilis

Feladat: Milyen gráf felel meg A^T-nak? Bizonyítsuk be, hogy A^T akkor és csak akkor irreducibilis, ha A irreducibilis!

Lemma.

1) $A \geq 0$, $B \geq 0 \Rightarrow AB \geq 0$.
2) $A > 0$, $\mathbf{v} \geq \mathbf{0}$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0} \Rightarrow A\mathbf{v} > 0$.
3) $A \geq 0$, és $\exists k_0$: $A^{k_0} > 0 \Rightarrow A^k > 0 \ \forall k \geq k_0$.

Bizonyítás. 1): nyilvánvaló.
2) $A\mathbf{v}$ elemei: $\sum_j a_{ij}v_j > 0$, mert minden tag ≥ 0, és van olyan, ami > 0.
3) A-nak nincs $\mathbf{0}$ oszlopa, mert ha lenne, akkor A^{k_0}-nak is lenne. De akkor $A^k > 0$ esetén a 2) miatt $A^{k+1} = A \cdot A^k$ minden oszlopa > 0. □

Tétel. $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $A \geq 0$-ra $n \geq 2$ esetén ekvivalens:
(i) A irreducibilis;
(ii) $(A+I)^{n-1} > 0$;
(iii) $\exists m > 0$: $(A+I)^m > 0$.

Bizonyítás. $(i) \Rightarrow (ii)$: G_A erősen összefüggő, és G_{A+I}-ben emellett minden csúcshoz kerül egy hurok. Tetsz i-ből j-be el lehet jutni G_A-ban legföljebb $n-1$ lépésben (ha egy csúcs ismétlődik, rövidíthetünk), és az utat meghosszabbíthatjuk G_{A+I}-ben megfelelő számú hurokkal $n-1$ hosszúvá.
$(ii) \Rightarrow (iii)$: Nyilván.
$(iii) \Rightarrow (i)$: G_{A+I} erősen összefüggő (m lépésben mindenhonnan mindenhova el lehet jutni), de akkor a hurkok nélkül is az (i-ből i-be is el lehet jutni a hurkok nélkül, ha j érintésével megyünk). □