Def. $A \geq 0$-ra A **primitív**, ha $\exists k$: $A^k > 0$ (azaz minden csúcsból minden csúcsba el lehet jutni pontosan k hosszúságú sétával).

Következmény. A primitív $\Rightarrow$ A irreducibilis.

Def. A **imprimitív**, ha irreducibilis, de nem primitív.

Állítás. A primitív $\Leftrightarrow$ $\exists k_0$: $k \geq k_0$-ra $A^k > 0$.

Bizonyítás. A lemma 3) állításából. □

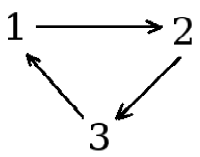
Pl.: A $G_A : 2 \rightleftarrows 1 \rightleftarrows 3$ gráfú $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ mátrix imprimitív, mert irreducibilis ugyan, de pl. 1-ből 1-be csak páros hosszúságú úton lehet eljutni, tehát A^k nem pozitív semelyik páratlan k-ra. Vagy másképpen: A^2 diagonális, tehát A^{2k} diagonális minden k-ra.

Tétel. $A \geq 0$ irreducibilis mátrixra
A primitív $\Leftrightarrow$ G_A-ban az irányított körök hosszának l.n.k.o.-ja 1.

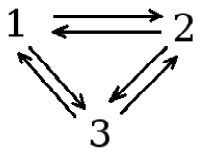
Bizonyítás. $\Rightarrow$: Ha a l.n.k.o. $= d > 1 \Rightarrow A^m$ átlójában csupa 0 van, ha m nem többszöröse d-nek $\Rightarrow$ A-nak ∞ sok olyan hatványa van, amely nem pozitív.
$\Leftarrow$: Ha a $d_1, \ldots, d_k$ körhosszak relatív prímek, akkor $\forall$ egész szám előáll $x_1 d_1 + \cdots + x_k d_k$ ($x_i \in \mathbb{Z}$) alakban, sőt $\exists m_0$: $\forall m \geq m_0$ előáll ilyen alakban $x_i \geq 0$ együtthatókkal. Vegyünk egy olyan irányított kört, ami minden csúcsot érint (ℓ hosszú). Ekkor mindenhonnan mindenhova el lehet jutni pontosan $2\ell + m_0$ hosszú sétával (a hiányt pótoljuk körökkel). □

Pl.: $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

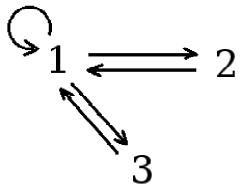
Mindegyik irreducibilis.



imprimitív:
csak 3 hosszú kör van.



primitív:
$\exists$ 2 és 3 hosszú kör.



primitív:
$\exists$ 1 hosszú kör.

Megjegyzés. A irreducibilis, és G_A-ban $\exists$ hurok (az átlóban $\exists \neq 0$ elem) $\Rightarrow$ A primitív.

Nemnegatív mátrixok spektrálsugara

Def. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $A \geq 0$-ra

$$\begin{aligned} \rho'(A) &= \sup \{ r \in \mathbb{R} \mid \exists \mathbf{0} \neq \mathbf{v} \geq 0 : \ A\mathbf{v} \geq r\mathbf{v} \} \\ &= \sup \{ r \in \mathbb{R} \mid \exists \mathbf{v} \geq 0, \ |\mathbf{v}| = 1, \ \text{hogy } A\mathbf{v} \geq r\mathbf{v} \} \\ &= \max \{ r \in \mathbb{R} \mid \exists \mathbf{v} \geq 0, \ |\mathbf{v}| = 1, \ \text{hogy } A\mathbf{v} \geq r\mathbf{v} \}, \end{aligned}$$

ui. $\{\, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \mid |\mathbf{v}| = 1 \,\}$ korlátos, zárt halmaz, és a $\mathbf{v} \mapsto \max\{\, r \mid A\mathbf{v} \geq r\mathbf{v} \,\}$ folytonos fv.

(adott vektorhoz a legnagyobb r: $0 \leq \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} v_1' \\ \vdots \\ v_n' \end{bmatrix}$ esetén $\min\{\, \frac{v_i'}{v_i} \mid v_i \neq 0 \,\}$.

Tétel. $\rho(A) = \rho'(A)$, ha $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $A \geq 0$.

A tétel bizonyításához kell a következő két lemma.

1. Lemma. Ha $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\forall |b_{ij}| \leq a_{ij} \Rightarrow \rho(B) \leq \rho'(A)$. Speciálisan $\rho(A) \leq \rho'(A)$.

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$ sajátvektor B-hez, λ sajátértékkel, és $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} |v_1| \\ \vdots \\ |v_n| \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ nemnegatív, nem nulla vektor. Belátjuk, hogy ekkor $A\mathbf{w} \geq |\lambda|\mathbf{w}$. Valóban:

$$(|\lambda|\mathbf{w})_i = |\lambda v_i| = |(B\mathbf{v})_i| = \Big|\sum_j b_{ij}v_j\Big| \leq \sum_j |b_{ij}||v_j| \leq \sum_j a_{ij}|v_j| = (A\mathbf{w})_i \quad \forall i\text{–re.}$$

Így $|\lambda| \leq \rho'(A)$, és ez B minden sajátértékére igaz $\Rightarrow \rho(B) \leq \rho'(A)$. □

2. Lemma. Legyen $A \in \mathbb{R}^n$, $A > 0$, $\rho' = \rho'(A)$, és $\mathbf{v}$ a ρ' definíciója szerint létező vektor: $\mathbf{v} \geq 0$, $\mathbf{v} \neq 0$, és $A\mathbf{v} \geq \rho'\mathbf{v}$. Ekkor $A\mathbf{v} = \rho'\mathbf{v}$, azaz ρ' sajátértéke is A-nak, és a $\mathbf{v}$ sajátvektor ρ'-höz. Tehát $\rho'(A) \leq \rho(A)$.

Bizonyítás. $\mathbf{u} := A\mathbf{v} - \rho'\mathbf{v} \geq 0$. Ha $\mathbf{u} \neq 0$, akkor $A > 0$ miatt $A(A\mathbf{v} - \rho'\mathbf{v}) > 0$, azaz $A(A\mathbf{v}) > \rho'(A\mathbf{v})$, és $A\mathbf{v} > 0$, így ρ'-t növelni lehetne, ami ellentmondás.
Tehát $A\mathbf{v} = \rho'\mathbf{v}$, vagyis $\mathbf{v}$ ρ' sajátértékű sajátvektor. □

Bizonyítás (Tétel). (vázlat) Ha $A > 0$, akkor az 1. lemma miatt $\rho(A) \leq \rho'(A)$, a 2. lemma miatt pedig $\rho(A) \geq \rho'(A)$, tehát $\rho(A) = \rho'(A)$.

Ha $A \geq 0$, akkor minden $\varepsilon > 0$-ra $A_\varepsilon := A + \varepsilon J > 0$, ahol J a csupa 1-ekből álló mátrix, így $\rho(A_\varepsilon) = \rho'(A_\varepsilon)$. Határátmenettel $\varepsilon \to 0$-ra kapjuk, hogy $\rho(A) = \rho'(A)$.

Tétel (a spektrálsugár becslése). Legyen $A \in \mathbb{R}^n$, $A \geq 0$. Ekkor

$$s := \text{minimális sorösszeg} \overset{(1)}{\leq} \rho(A) \overset{(2)}{\leq} \text{maximális sorösszeg} =: S$$

$$\text{minimális oszlopösszeg} \leq \rho(A) \leq \text{maximális oszlopösszeg}$$

Bizonyítás. A sorösszegekkel való becslésből következik az oszlopösszegekkel való becslés, mert $k_A(x) = k_{A^T}(x) \Rightarrow \rho(A) = \rho(A^T)$.

(1): $A \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} s \\ \vdots \\ s \end{bmatrix} = s \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow s \leq \rho'(A) = \rho(A)$.

(2): $\rho(A) = \rho'(A) \Rightarrow \exists \mathbf{v} \geq 0$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, amelyre $A\mathbf{v} \geq \rho\mathbf{v}$. Legyen v_i a $\mathbf{v}$ legnagyobb komponense. Ekkor

$$\rho v_i \leq (A\mathbf{v})_i = \textstyle\sum_j a_{ij}v_j \leq (\sum_j a_{ij})v_i = s_i v_i \leq S v_i \Rightarrow \rho \leq S, \text{ mert } v_i > 0.$$

□

Következmény. $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$-re $\rho(B) \le \max\left\{ \sum_j |b_{ij}| \,\middle|\, i = 1, \dots, n \right\}$ az 1. Lemma miatt.

Gerschgorin-körök: $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ minden λ sajátértékére van olyan i, hogy $|\lambda - b_{ii}| \le \sum\limits_{i\ne j} |b_{ij}|$, azaz a sajátértékek a b_{ii} körüli $\sum\limits_{i\ne j} |b_{ij}|$ sugarú körlapok uniójában vannak. (Nem bizonyítjuk.)

Pl.: $B = \begin{bmatrix} i & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$-re a sajátértékek a $|z - i| \le 2$, $|z + 1| \le 1$ és $|z - 3| \le 3$ körökön belül vannak.

Perron-tétel

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $A > 0$-ra

1. Ⓑ $\exists\, \mathbf{h} > 0$ sajátvektor $\rho(A)$ sajátértékkel;
2. Ⓑ a $\rho(A)$-hoz tartozó sajátaltér 1-dimenziós;
3. $\rho(A)$ csak egyszeres gyöke A karakterisztikus polinomjának.
4. Ha λ sajátértéke A-nak, és $|\lambda| = \rho(A)$, akkor $\lambda = \rho(A)$;

Bizonyítás. Legyen $\rho := \rho(A)$.

1.: 2. Lemma $\Rightarrow \exists \mathbf{h} \ge 0$ sajátvektor ρ-hoz. Ekkor $\rho\mathbf{h} = A\mathbf{h} > 0$, így $\mathbf{h} > 0$.

2.: Tegyük fel, hogy az előbbi $\mathbf{h}$-n kívül van még egy $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ független sajátvektor ρ-hoz (a sajátaltér dimenziója csak $A - \rho I$ rangjától függ, tehát $\mathbb{R}^n$-ben ugyanannyi, mint $\mathbb{C}^n$-ben). Ha $\mathbf{v}$-ben van pozitív (negatív) komponens, akkor $\exists c > 0$ ($c < 0$): $\mathbf{h} - c\mathbf{v} \ge 0$, de nem > 0. Ez ellentmond az 1. rész bizonyításának.

3.: Tegyük fel, hogy ρ többszörös gyök. Ekkor a 2. rész miatt A Jordan-normálalakjában egyetlen ρ-blokk van, és feltehetjük, hogy a Jordan-bázisban szerepel a $\mathbf{h}$. Az előtte levő $\mathbf{v}$ báziselemre $A\mathbf{v} = \rho\mathbf{v} + \mathbf{h}$. Megint feltehetjük, hogy $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. $\exists c > 0$ skalár, hogy $\mathbf{v}' = \mathbf{v} + c\mathbf{h} \ge 0$. Viszont erre

$$A\mathbf{v}' = \rho\mathbf{v} + \mathbf{h} + c\rho\mathbf{h} = \rho\mathbf{v}' + \mathbf{h} > \rho\mathbf{v}',$$

ami azt jelentené, hogy $\rho < \rho'(A)$, ami ellentmondás.

4.: Legyen $\mathbf{v}$ sajátvektor a λ sajátértékhez. Legyen $\mathbf{w} = [|v_1| \dots |v_n|]^T$ mint az 1. lemma bizonyításában. Ezzel:

$$\rho w_i = |\lambda||v_i| = |(A\mathbf{v})_i| = \left| \sum_j a_{ij} v_j \right| \le \sum_j a_{ij}|v_j| = (A\mathbf{w})_i \ \forall i \quad \Rightarrow \rho\mathbf{w} \le A\mathbf{w}.$$

De akkor a 2. lemma szerint $\rho\mathbf{w} = A\mathbf{w}$, tehát végig $=$ van. A $\triangle$-egyenlőtlenség egyenlősége miatt ebből következik, hogy a_{ij} és a_{ik} minden j, k-ra egyirányú (ui. $a_{ij} > 0$ minden j-re) $\Rightarrow \exists \varepsilon \in \mathbb{C}$: $|\varepsilon| = 1$, és $v_j = |v_j|\varepsilon\ \forall j$. Így $\mathbf{v} = \varepsilon\mathbf{w}$. De $\mathbf{w}$ ρ-sajátvektor, így $\mathbf{v}$ is az, viszont $\mathbf{v}$ λ-sajátvektor is $\Rightarrow \lambda = \rho$.

$\square$