Frobenius-tétel

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $A \geq 0$ irreducibilis mátrixra
1. $\exists\ \mathbf{v} > 0$ sajátvektor $\rho(A)$ sajátértékkel;
2. a $\rho(A)$-hoz tartozó sajátaltér 1-dimenziós;
3. $\rho(A)$ csak egyszeres gyöke A karakterisztikus polinomjának.

Bizonyítás. **1.** A irred. $A \geq 0 \Rightarrow \exists m > 0$: $B = (A+I)^m > 0$

$$A \sim \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ * & \ddots & 0 \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} \text{ Jordan-alak } \Rightarrow B = (A+I)^m \sim \begin{bmatrix} (\lambda_1+1)^m & & \\ * & \ddots & 0 \\ & & (\lambda_n+1)^m \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} \rho(B) = \max_i |(\lambda_i+1)^m| \leq \max(|\lambda_i|+1)^m \leq (\rho(A)+1)^m, \\ \text{viszont } \rho(A) \text{ s.é.-e } A\text{-nak} \Rightarrow (\rho(A)+1)^m \text{ s.é.-e } B\text{-nek} \end{array}\right\} \Rightarrow \rho(B) = (\rho(A)+1)^m$$

$$\exists \mathbf{v} \geq 0\ A\text{-s.vektor } \rho(A)\text{-hoz} \ \Rightarrow\ \mathbf{v}\ B\text{-s.vektor } \rho(B) = (\rho(A)+1)^m\text{-hez} \ \Rightarrow\ \mathbf{v} > 0$$

3.: $\rho(A)$ csak egyszer szerepel a λ_i-k között, mert $\rho(B) = (\rho(A)+1)^m$ is csak egyszer szerepel a $(\lambda_i+1)^m$-ek között.

2. következik a 3.-ból. □

Pl.: A Perron-tétel 4. állítása (hogy a $\rho(A)$-n kívül nincs másik maximális abszolút értékű sajátérték) nem teljesül általában irreducibilis mátrixokra, pl. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ irreducibilis, de minden sajátértéke 1 abszolút értékű (harmadik egységgyökök).

Állítás. Ⓑ Ha $A > 0$ primitív $\Rightarrow \rho(A)$ az egyetlen $\rho(A)$ abszolút értékű sajátértéke.

Bizonyítás. A primitív $\Rightarrow \exists k$: $A^k > 0$. Legyen $\rho := \rho(A)$, tegyük fel, hogy λ sajátérték, és $|\lambda| = \rho$, de $\lambda \neq \rho$.

Ekkor $\exists \mathbf{u}$ s.vektor λ-hoz, és $\mathbf{v}$ s.vektor ρ-hoz.
$\Rightarrow \mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ s.vektora A^k-nak is λ^k és ρ^k sajátértékkel, és $|\lambda^k| = \rho^k$.

A Frobenius-tétel 1. részének bizonyításához hasonlóan $\rho(A^k) = \rho^k \Rightarrow$ a Perron-tétel 4. állítása miatt $\lambda^k = \rho^k$. De akkor A-nak a $\rho(A^k) = \rho^k$-hoz tartozó sajátaltere legalább 2-dimenziós (tartalmazza $\mathbf{u}$-t és $\mathbf{v}$-t), és ez ellentmond a Perron-tétel 2. állításának. □

Következmény. Primitív mátrixokra is teljesülnek a Perron-tétel állításai.

Mátrixsorozatok limesze

Def. $A_1, A_2, \ldots \in \mathbb{C}^{m\times n}$ mátrixsorozatra

$$\lim_{k\to\infty} A_k = B, \text{ha } \forall i,j\text{-re } \lim_{k\to\infty} a_{ij}^{(k)} = b_{ij}.$$

Ezzel ekvivalens, hogy $||A_k - B|| \to 0$.

Lemma. $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $\rho(B) < 1 \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} B^k = 0$

Bizonyítás. Elég B Jordan-normálalakjának Jordan-blokkjaira belátni. Legyen $J = \lambda I + N$ λ-blokk, ahol $|\lambda| \le \rho(B) < 1$.

$J^k = (\lambda I + N)^k = \sum_t \binom{k}{t}\lambda^{k-t}N^t$. Egy rögzített helyen (és így rögzített t-re) a hatványok eleme: $\binom{k}{t}\lambda^{k-t} = p(k)\cdot\lambda^k$, ahol $p(k)$ polinom, és így $\lim\limits_{k\to\infty} p(k)\lambda^k = 0$. □

Tétel. $A \ge 0$ irreducibilis és primitív $\Rightarrow \left(\dfrac{A}{\rho(A)}\right)^k \to \mathbf{v}\cdot\mathbf{u}^T$, ahol $\mathbf{v}$ az A-nak, $\mathbf{u}$ pedig A^T-nak $\rho(A) = \rho(A^T)$-hoz tartozós sajátvektora, amelyekre $\mathbf{u}^T\mathbf{v} = 1$ teljesül.

Bizonyítás. $\rho := \rho(A)$, $k_A(x) = (x - \rho(A))g(x)$, ahol a két faktor relatív prím, mert $\rho(A)$ csak egyszeres gyök. Így

$$\exists C \text{ invertálható, hogy } C^{-1}AC = \begin{bmatrix} \rho & | & 0 \\ - & & - \\ 0 & | & * \end{bmatrix} \text{ blokkmátrix.}$$

Legyen $C = [\,\mathbf{v} \quad | \quad *\,]$, és $C^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}^T \\ - \\ * \end{bmatrix}$.

Ekkor $C^{-1}\left(\dfrac{A}{\rho}\right)C = \begin{bmatrix} 1 & | & 0 \\ - & & - \\ 0 & | & B \end{bmatrix}$, ahol $\rho(B) < 1$.

$$\left(C^{-1}\frac{A}{\rho}C\right)^k = C^{-1}\left(\frac{A}{\rho}\right)^k C \to \begin{bmatrix} 1 & | & 0 \\ - & & - \\ 0 & | & 0 \end{bmatrix} \text{ a lemma miatt.}$$

$$\left(\frac{A}{\rho}\right)^k \to C\begin{bmatrix} 1 & | & 0 \\ - & & - \\ 0 & | & 0 \end{bmatrix}C^{-1} = [\,\mathbf{v} \quad | \quad *\,]\begin{bmatrix} 1 & | & 0 \\ - & & - \\ 0 & | & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{u}^T \\ - \\ * \end{bmatrix} = \mathbf{v}\mathbf{u}^T,$$

és $I = C^{-1}C = \begin{bmatrix} \mathbf{u}^T \\ - \\ * \end{bmatrix}[\,\mathbf{v} \quad | \quad *\,] = \begin{bmatrix} \mathbf{u}^T\mathbf{v} & | & * \\ -- & & - \\ * & | & * \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{u}^T\mathbf{v} = 1.$

$\mathbf{v}$ és $\mathbf{u}$ skalárszoros erejéig leolvasható a limeszből. $\mathbf{v}$ az A ρ-hoz tartozó s.vektora a C választása alapján, és mivel $\left(\dfrac{A^T}{\rho}\right)^k \to (\mathbf{v}\mathbf{u}^T)^T = \mathbf{u}\mathbf{v}^T$ is igaz, $\mathbf{u}$ az A^T ρ-hoz tartozó s.vektora. □

Tétel. $A \ge 0$ irreduciblis mátrixra

A primitív $\Leftrightarrow$ A-nak csak egy maximális abszolút értékű sajátértéke van.

Bizonyítás. (vázlat) Az $\Rightarrow$ irányt láttuk, a másik az előző tétel segítségével bizonyítható ($\mathbf{v}$-ről és $\mathbf{u}$-ról is feltehetjük, hogy pozitívak, és akkor elég nagy k-ra $\left(\dfrac{A}{\rho}\right)^k > 0$). □

Sztochasztikus mátrixok

Def. Véges állapotú **Markov-lánc**:
állapotok: $\{1, \ldots, n\}$
$X_0, X_1, \ldots$ valószínűségi változók (értékkészletük $\subseteq \{1, \ldots, n\}$)
$P(X_{k+1} = i | X_k = j) = a_{ij}$ (a $j \to i$ átmenet valószínűsége)
X_k eloszlása egy $\mathbf{v}_k$ sztochasztikus vektor ($\forall$ eleme $\in [0,1]$, összegük 1), és
$\mathbf{v}^{(k+1)} = A\mathbf{v}^{(k)}$
$\mathbf{v}^{(0)} =$ a kezdeti eloszlás.

Def. *A* **sztochasztikus mátrix**: $\forall$ eleme $\in [0,1]$, és az oszlopok összege 1.

Állítás. A sztochasztikus mátrix $\Rightarrow \rho(A) = 1$.

Bizonyítás. $A \geq 0$, és minden oszlopösszeg $1 \Rightarrow 1 \leq \rho(A) \leq 1$ □

Következmény. Ha A primitív sztochasztikus mátrix, akkor $A^k \to \mathbf{v} \cdot [1\ 1 \ldots 1]$, ahol $\mathbf{v}$ az A 1-hez tartozó sztochasztikus sajátvektora (ui. az A^T 1-hez tartozó s.vektora $[1\ 1 \ldots 1]^T$.)
$\Rightarrow$ Tetszőleges $\mathbf{v}_0$ sztochasztikus vektorra $A^k\mathbf{v}_0 \to \mathbf{v}$.

Következmény. Duplán sztochasztikus mátrixban (A és A^T is sztochasztikus) $A^k \to \frac{1}{n}\begin{bmatrix} 1 & 1 & \ldots \\ 1 & 1 & \ldots \\ \vdots & & \end{bmatrix}$.

Pl.: Egy bolha ugrál a számegyenes 1, 2, 3 és 4 pontjain. Minden másodpercben ugrik egyet; ha az 1-esen vagy a 4-esen van, akkor $\frac{2}{3}$ valószínűséggel 1 távolságra, $\frac{1}{3}$ valószínűséggel 2 távolságra ugrik befelé, ha a 2-esen vagy a 3-ason, akkor valamelyik szomszédos számra ugrik, $\frac{1}{2}$-$\frac{1}{2}$ valószínűséggel. Ha véletlenszerűen ráhelyezzük az egyik pontra, hova tart a bolha helyzetének valószínűségeloszlása?

Megoldás: Az adott állapotokból az adott állapotokba való átmenet valószínűségeit az $A = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 2/3 & 0 & 1/2 & 1/3 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$ primitív mátrix adja meg. A spektrálsugara 1 (az összes oszlopösszeg 1, mert A sztochasztikus), és az 1-hez tartozó sajátvektorok $t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ alakúak.

Ha az $A^k\mathbf{v}_0$ sorozat $\mathbf{v}_0$ kiinduló vektora egy valószínűségeloszlás, azaz a vektor elemeinek összege 1, akkor a határérték is az, tehát a sajátvektorok közül az $\begin{bmatrix} 1/6 \\ 2/6 \\ 2/6 \\ 1/6 \end{bmatrix}$ vektort kapjuk.

Pl. $A^{10}\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 0.172 \\ 0.326 \\ 0.340 \\ 0.162 \end{bmatrix}$, $A^{20}\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 0.167 \\ 0.333 \\ 0.334 \\ 0.166 \end{bmatrix}$.