Egyenletrendszerek

Egyenletrendszerek megoldása

1.D *Lineáris egyenletrendszer*en olyan egyenletrendszert értünk, mely véges sok elsőfokú egyenletből áll, és véges sok ismeretlent tartalmaz. Az n-ismeretlenes, m egyenletből álló *lineáris egyenletrendszer* általános alakja:

$$\left.\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\} \qquad (1)$$

ahol x_i jelöli az egyenletrendszer ismeretleneit, b_j a konstansait és a_{ij} az együtthatóit ($i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, m$). A lineáris egyenletrendszert *homogén*nek mondjuk, ha $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$, és *inhomogén*nek ha a konstansok legalább egyike nem 0.

2.D Egyenletrendszer *elemi átalakításain* a következő három transzformációt értjük:

- két egyenlet felcserélése;
- egy egyenlet nem 0 számmal való beszorzása;
- egy egyenlet konstansszorosának egy másikhoz adása.

3.T Egyenletrendszer elemi átalakításai ekvivalens átalakítások, azaz az eredeti és az átalakított egyenletrendszernek azonosak a megoldásai.

Az egyenletrendszert megoldásakor elemi átalakításokkal olyan alakra hozzuk, amelyből a megoldás könnyen leolvasható. A megoldás lépéseinek lejegyzéséhez elégendő a lineáris egyenletrendszer együtthatóinak és konstansainak változását egy számtáblázatban számon tartani.

4.D Az m sorba és n oszlopba rendezett mn elemű sorozatokat $m \times n$ típusú *mátrix*oknak nevezzük. Egy mátrix egy elemének *index*én azt a számpárt értjük, melyből az első szám azt mondja meg, hogy az elem hányadik sorban, míg a második azt, hogy az elem hányadik oszlopban van. Pl. az $a_{i-1,2}$ elem a mátrix $i-1$-edik sorában és a 2. oszlopában van. Ha az index mindkét eleme egyjegyű, a vessző elhagyható, pl. b_{25} a 2. sor 5. elemét jelöli. A mátrixokat könyvekben félkövér, kézírásban gyakran kétszer aláhúzott nagy betűvel jelölik, indexében gyakran szerepel mérete ($\mathbf{A}, \mathbf{A}_{m\times n}, \underline{\underline{A}}$). Általános alakjára a következő jelöléseket használjuk:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}]_{m\times n} \qquad (2)$$

Egy egyenletrendszer együtthatói is mátrixba rendezhetők. Az (1) *egyenletrendszer mátrixán* vagy együtthatómátrixán a (2)-beli mátrixot értjük, míg *kiegészített mátrixán* a következőt:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right] \qquad (3)$$

Az egyenletrendszeren végrehajtott elemi átalakítások a kiegészített mátrix sorain hasonló műveletekkel is megvalósíthatók, amiket *elemi sorművelete*knek nevezünk. Ezek tehát a következők:

- két sor felcserélése;
- egy sor nem 0 számmal való beszorzása;
- egy sor konstansszorosának egy másikhoz adása.

Gyakran fogunk találkozni az alábbi mátrixokkal:

5.D Az $n \times n$ típusú mátrixokat *négyzetes mátrixok*nak nevezzük. A továbbiakban a vektorokat és az egy sorból, vagy egy oszlopból álló mátrixokat azonosítani fogjuk. Ennek megfelelően az $n \times 1$ típusú mátrixokat, vagyis az egyetlen oszlopból álló mátrixokat *oszlopvektor*oknak, míg az $1 \times n$ típusú mátrixokat *sorvektor*oknak fogjuk nevezni. A vektorokat a továbbiakban – ha külön mást nem mondunk – oszlopvektoroknak fogjuk tekinteni, így pl. az eddig $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$-nel jelölt vektort

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

fogja jelölni.

6.M Minden mátrix tekinthető úgy, mint amely oszlopvektorokból illetve sorvektorokból áll. Pl. a (2)-beli $\mathbf{A}$ mátrix felírható a következő alakban:

$$\mathbf{A} := \left[\begin{array}{c|c|c|c} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \ldots & \mathbf{a}_n \end{array}\right],$$

ahol az $\mathbf{A}$ mátrix j-edik oszlopvektora:

$$\mathbf{a}_j := \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}.$$

Hasonlóképpen

$$\mathbf{A} := \left[\begin{array}{c} \mathbf{s}_1 \\ \hline \mathbf{s}_2 \\ \hline \ldots \\ \hline \mathbf{s}_m \end{array}\right], \text{ ahol } \mathbf{s}_i := \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{in} \end{bmatrix}.$$

A fenti példában alkalmazott függőleges illetve vízszintes elválasztó vonalakat általában akkor használjuk, ha két vagy több mátrixból rakunk össze egyet. Például a (3)-beli kiegészített mátrixot a (2)-beli $\mathbf{A}$ és az egyenletrendszer b_j ($j = 1, 2, \ldots, m$) konstansaiból képzett $\mathbf{b}$ vektorból képezzük, amit így jelölünk:

$$[\mathbf{A}|\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

7.D A (2)-beli $\mathbf{A}$ mátrix *főátló*ján az $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{rr}$ elemeket értjük, ahol r az m és az n elemek közül a kisebbik. Az $\mathbf{A}$ *mellékátlója* azokból az elemekből áll, amelyek sor- és oszlopindexének összege $n + 1$.

8.D Azt mondjuk, hogy egy mátrix *sorlépcsős* alakú, ha

1. a csupa 0-ból álló sorok (a zérus sorok) a mátrix utolsó sorai,
2. a nem zérus sorok mindegyikének első nem 0 eleme 1, amit *vezető egyes*nek nevezünk,
3. bármely két nem zérus sor vezető egyese közül a felső soré balra helyezkedik el az alsó sor vezető egyesétől.

Ha ezeken túl még az is igaz, hogy a mátrixban

4. minden sor vezető egyesének oszlopában minden más elem 0,

akkor azt mondjuk, hogy a mátrix *redukált sorlépcsős* alakú.

P Az alábbi mátrixok sorlépcsős alakúak, az utolsó kettő ráadásul redukált sorlépcsős alakú:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 3 & 2 & 5 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 3 & 2 & 5 \\ 0 & \mathbf{1} & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 2 & \mathbf{0} & 2 & \mathbf{0} & 1 \\ \mathbf{0} & 0 & \mathbf{1} & 3 & \mathbf{0} & 0 \\ \mathbf{0} & 0 & \mathbf{0} & 0 & \mathbf{1} & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 1 & \mathbf{0} & 5 \\ \mathbf{0} & 0 & \mathbf{1} & 2 \\ \mathbf{0} & 0 & \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix}$$

9.T *Sorlépcsős alakra hozás:* Bármely mátrix elemi sorműveletekkel *sorlépcsős* alakra hozható.

Redukált sorlépcsős alakra hozás: Bármely mátrix elemi sorműveletekkel *redukált sorlépcsős* alakra hozható.

B Tekintsünk egy tetszőleges $m \times n$-es mátrixot, pl. a (2)-belit.

1. Ha az első oszlopban csak 0 elemek állnak, takarjuk le ezt az oszlopot, és tekintsük a maradék mátrixot. Ha ennek első oszlopában ismét csak 0 elemek vannak, azt is takarjuk le, és ezt addig folytassuk, míg egy olyan oszlopot nem találunk, amelyben van nem 0 elem. Ha ilyen oszlopot nem találunk, az eljárásnak vége, a mátrix sorlépcsős alakú.

2. Ha az első oszlop első sorában álló elem 0, akkor cseréljük ki e sort egy olyannal, melynek első eleme nem 0. Az egyszerűség kedvéért a továbbiakban minden lépés végrehajtása után megváltoztatjuk a mátrix paramétereinek jelentését, m és n mindig az éppen vizsgált mátrix sorainak ill. oszlopainak számát jelöli (ez bizonyos lépések után csökkenhet), a_{ij} pedig az adott lépésben épp az i-edik sorban lévő j-edik elemet.

Miután elértük, hogy $a_{11} \neq 0$, elosztjuk az első sort a_{11}-gyel, így az első sor első nem 0 eleme 1 lesz. Ezután az 1 alatti együtthatókat a 2. sortól az m-edikig sorban haladva 0-ra változtatjuk: ha az i-edik sorbeli $a_{i1} \neq 0$, akkor az első sor $-a_{i1}$-szeresét hozzáadjuk az i-edik sorhoz.

3. A fenti átalakítás után takarjuk le az első sort és az első oszlopot. Ha ekkor nem marad a mátrixban több sor, vége az eljárásnak, a korábban letakart sorokat feltárva megkaptuk a sorlépcsős alakot. Egyébként ugorjunk vissza az 1. lépéshez, és folytassuk az eljárást.

Ha nem sorlépcsős alakra, hanem redukált sorlépcsős alakra akrunk jutni, akkor a sorlépcsős alak vezető egyesei fölötti értékeket is 0-ra változtatjuk a 2. lépésben leírt módon.

10.D Azt az eljárást, amikor a lineáris egyenletrendszer kiegészített mátrixát redukált sorlépcsős alakra hozzuk, *Gauss–Jordan-módszer*nek illetve *Gauss–Jordan-elimináció*nak nevezzük. *Gauss-módszer*ről illetve *Gauss-elimináció*ról akkor beszélünk, ha a kiegészített mátrixot sorlépcsős alakra hozzuk.

M Egy lineáris egyenletrendszer megoldásai azonnal leolvashatók a kiegészített mátrixból annak redukált sorlépcsős alakra hozása után. Az egyenletrendszernek nincs megoldása, ha e mátrixnak van olyan sora, melyben az utolsó elem nem 0, de az összes többi igen, ennek ugyanis egy ellentmondó egyenlet felel meg. Az egyenletrendszernek egyetlen megoldása van, ha a zérus sorokat elhagyva a mátrixból egy olyan $n \times (n + 1)$-es mátrixot kapunk, amelyben az i-edik sor vezető egyese az i-edik oszlopban van ($i = 1, 2, \ldots n$). Ha a redukált alakban az utolsó oszlopon kívül más oszlop is akad, melyben nincs vezető egyes, akkor az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van. Azokat a változókat, melyekhez tartozó oszlopokban van vezető egyes, kifejezhetjük azok segítségével, melyekhez tartozó oszlopban nincs vezető egyes. Az előbbieket szokás *kötött ismeretlen*nek, míg az utóbbit *szabad ismeretlen*nek nevezni.

Egyenletrendszerek megoldásainak szemléltetése 3 dimenzióban

P Tekintsük az

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ x + y + z &= 2 \end{aligned}$$

egyenletrendszert. Látható, hogy ez két párhuzamos sík egyenlete, melyeknek nincs közös pontjuk. Megoldása Gauss-módszerrel:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

P Vizsgáljuk meg a

$$\begin{aligned} x + y \quad + z \quad &= 2 \\ x + y \quad - z \quad &= 4 \\ 2x + 2y \qquad &= 6 \\ - 2z &= 2 \end{aligned}$$

egyenletrendszert. A négy egyenlet négy egy egyenesen átmenő síkot ábrázol, a megoldások száma tehát végtelen.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Kötött ismeretlenek x, z, szabad ismeretlen y. A megoldás tehát:

$$\begin{aligned} xy \quad &= 3 & \qquad x &= 3 - y \\ z &= -1 \quad \text{azaz} & z &= -1 \end{aligned}$$

P Tekintsük az alábbi egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} x + y \quad + z \quad &= 0 \\ x - y \quad + z \quad &= 0 \\ 2x + y \quad - 3z &= 0 \\ x + 3y + z \quad &= 0 \end{aligned}$$

egyenletrendszert. A négy egyenlet négy síkot határoz meg, melyeknek egyetlen közös pontjuk van: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$. (Ez az eredetivel ekvivalens egyenletrendszer, mely egyúttal a megoldást is megadja.)

Mátrixok

Mátrixműveletek

a mátrixokkal végezhető műveleteket és a műveleti azonosságokat lásd a példatárban.

M Az $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ vektorok $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ skaláris szorzatát a vektorok szokásos oszlopmátrix alakú reprezentációja esetén a $\mathbf{x}^T\mathbf{y}$ mátrixszorzat állítja elő annyi különbséggel, hogy az utóbbi esetben az eredmény egy 1×1-es mátrix.

11.M A lineáris egyenletrendszerek ún. *mátrixszorzatos alak*ba írhatók. Például az (1) egyenletrendszer az

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

jelöléseket használva $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ alakba írható. A mátrixok típusait is jelölve: $\mathbf{A}_{m\times n}\mathbf{x}_{n\times 1} = \mathbf{b}_{m\times 1}$.

12.D A több, azonos együtthatómátrixszal rendelkező egyenletrendszert *szimultán egyenletrendszer*nek nevezzük. Ezek egyetlen közös mátrixszorzatos alakba is felírhatók. Tekintsük a k egyenletrendszerből álló $\mathbf{Ax}_1 = \mathbf{b}_1$, $\mathbf{Ax}_2 = \mathbf{b}_2$, $\dots$ $\mathbf{Ax}_k = \mathbf{b}_k$ szimultán lineáris egyenletrendszert. Ez átírható $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ alakba, ahol

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= \left[\begin{array}{c|c|c|c} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \dots & \mathbf{x}_k \end{array}\right]_{n\times k}, \\ \mathbf{B} &= \left[\begin{array}{c|c|c|c} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \dots & \mathbf{b}_k \end{array}\right]_{m\times k}. \end{aligned}$$

M A szimultán egyenletrendszer is megoldható a Gauss- illetve a Gauss–Jordan-módszerrel. Ekkor az elemi sorműveleteket az $\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{B} \end{array}\right]$ mátrixon végezzük.

13.M Legyen az $\mathbf{A}_{m\times n}$ mátrix sor- illetve oszlopvektorokra felbontott alakja a 6.M szerinti, a $\mathbf{B}_{n\times k}$ mátrix oszlopvektorokra bontott alakja pedig legyen

$$\mathbf{B} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \dots & \mathbf{b}_k \end{array}\right].$$

Ekkor az $\mathbf{AB}$ mátrixszorzat sor- illetve oszlopvektorokra felbontott alakjai a következők:

$$\begin{aligned} \mathbf{AB} &= \mathbf{A}\left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{s}_1 & \dots & \mathbf{s}_m \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{As}_1 & \dots & \mathbf{As}_m \end{array}\right] \\ &= \left[\begin{array}{c} \mathbf{s}_1 \\ \hline \dots \\ \hline \mathbf{s}_n \end{array}\right]\mathbf{B} = \left[\begin{array}{c} \mathbf{s}_1\mathbf{B} \\ \hline \dots \\ \hline \mathbf{s}_n\mathbf{B} \end{array}\right] \end{aligned}$$

A egyenletrendszerek mátrixszorzatos alakjából az is látszik, hogy az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer pontosan akkor *oldható meg*, ha a $\mathbf{b}$ vektor előáll az $\mathbf{A}$ oszlopvektorainak lineáris kombinációjaként, ugyanis

$$\mathbf{b} = \mathbf{Ax} = \left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{a}_1 & \dots & \mathbf{a}_n \end{array}\right]\mathbf{x} = \mathbf{a}_1x_1 + \dots + \mathbf{a}_nx_n.$$

A megoldás épp e lineáris kombináció konstansainak megkeresését jelenti.

14.D Legyen $\mathbf{A}_{m\times n}$ egy valós mátrix. Tekintsük a következő A függvényt:

$$A\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{Ax}.$$

Ezt az A függvényt az $\mathbf{A}$ mátrixhoz tartozó leképezésnek nevezzük. E leképezés értelmezési tartománya $\mathbf{R}^n$, értékkészlete az $\mathbf{R}^m$ része, ezt nevezzük A *képter*ének. Azon vektorok halmazát, melyeket az A leképezés a $\mathbf{0}$-vektorba visz, az A leképezés *magter*ének nevezzük. Az $\mathbf{A}$ mátrix magterén és képterén a hozzá tartozó leképezés magterét és képterét értjük.

M Az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer megoldható, ha $\mathbf{b}$ az $\mathbf{A}$-hoz tartozó A leképezés képterében van, a magtér elemei megegyeznek a homogén lineáris $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ egyenletrendszer megoldásaival.

Mátrix inverze és az egyenletrendszerek

Az $\mathbf{R}^n$ tér

Az $\mathbf{R}^n$ tér és alterei

15.D $\mathbf{R}^n$ a Descartes-szorzat definíciója alapján az $\mathbf{R}$ elemeiből képzett rendezett szám-n-esek halmazát jelöli. Ugyanezt a jelölést használjuk az n-dimenziós vektorok halmazára is, minthogy a rendezett szám-n-esek és az n-dimenziós vektorok között természetes megfeleltést létesít a

$$(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$$

kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés. Ha e halmazt ellátjuk a vektorok összeadásának és valós skalárral való szorzásának műveletével is, akkor az $\mathbf{R}^n$-ről, mint *vektortér*ről beszélünk.

$\mathbf{C}^n$ jelöli a rendezett komplex számn-esek, és egyúttal az n-dimenziós komplex vektorok halmazát is. Ha ez utóbbi halmazt ellátjuk a vektorösszeadás és a komplex skalárral való szorzás műveletével, akkor az ugyancsak $\mathbf{C}^n$-nel jelölt komplex n-dimenziós vektortér fogalmához jutunk.

16.D Azt mondjuk, hogy az $L \subseteq \mathbf{R}^n$ vektorhalmaz az $\mathbf{R}^n$ vektortér *lineáris altere*, ha L-ből bárhogy kiválasztva véges sok $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ vektort, azok minden lineáris kombinációja is L-ben lesz.

M Könnyen látható, hogy L pontosan akkor lineáris altér, ha tetszőleges $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in L$ vektorok és tetszőleges $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$ valósok esetén $c_1\mathbf{a} + c_2\mathbf{b} \in L$. E feltétellel ekvivalens az alábbi kettő:

1. tetszőleges $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in L$ vektorok esetén $\mathbf{a} + \mathbf{b} \in L$,
2. tetszőleges $\mathbf{a} \in L$ vektor és $c \in \mathbf{R}$ valós esetén $c\mathbf{a} \in L$.

17.T Homogén lineáris egyenletrendszer megoldásainak minden lineáris kombinációja megoldás, azaz másként fogalmazva az $\mathbf{A}_{m\times n}\mathbf{x}_{n\times 1} = \mathbf{0}_{m\times 1}$ egyenletrendszer megoldásai az $\mathbf{R}^n$ tér egy lineáris alterét alkotják.

B Ha $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ megoldás, azaz $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ és $\mathbf{Ay} = \mathbf{0}$, akkor $\mathbf{A}(c_1\mathbf{x} + c_2\mathbf{y}) = c_1\mathbf{Ax} + c_2\mathbf{Ay} = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$.

P
a. A zérusvektorból álló $L = \{\mathbf{0}\}$ halmaz és az $L = \mathbf{R}^n$ halmaz egyaránt alterek. Ezeket *triviális altereknek* nevezzük.

b. Az $\mathbf{R}^2$ nemtriviális alterei azok a vektorhalmazok, amelyekben a vektorok végpontjai egy origón átmenő egyenesen vannak. Ilyen altérhez úgy jutunk, ha vesszük egy nem-$\mathbf{0}$ vektor összes skalárszorosát. $\mathbf{R}^3$ nemtriviális alterei olyan vektorokból állnak, melyek végpontjai vagy egy origón áthaladó egyenesen, vagy egy origón áthaladó síkon vannak.

c. Az $\mathbf{A}$ mátrixhoz tartozó A leképezés magtere altér $\mathbf{R}^n$-ben, míg A képtere altér $\mathbf{R}^m$-ben. Az állítás első felét épp a 17.T-ben bizonyítottuk, a második felének bizonyítása is hasonlóan egyszerű.

18.T Az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer két tetszőleges megoldásának különbsége az $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ homogén egyenletrendszer egy megoldását adja. Az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer összes megoldását megkapjuk, ha egyetlen megoldásához hozzáadjuk a homogén $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ egyenletrendszer összes megoldását.

B Ha $\mathbf{x}_1$ és $\mathbf{x}_2$ megoldások, azaz $\mathbf{Ax}_1 = \mathbf{b}$ és $\mathbf{Ax}_2 = \mathbf{b}$, akkor $\mathbf{A}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) = \mathbf{Ax}_1 - \mathbf{Ax}_2 = \mathbf{b} - \mathbf{b} = \mathbf{0}$, tehát az $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$ különbség megoldása a homogén egyenletrendszernek. A tétel másik állításának bizonyításához csak annyit kell belátni, hogy ha $\mathbf{x}_0$ az inhomogén, $\mathbf{y}$ a homogén egy tetszőleges megoldása, akkor $\mathbf{x}_0 + \mathbf{y}$ az inhomogén egy megoldását adja. Ez nyilvánvaló, hisz $\mathbf{A}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{y}) = \mathbf{Ax}_0 + \mathbf{Ay} = \mathbf{b} + \mathbf{0} = \mathbf{b}$.

Vektortér, altér

19.D Legyen V egy tetszőleges nemüres halmaz. Legyen definiálva V-n két művelet: az összeadás, és a skalárral való szorzás, azaz bármely $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$ elemre és $\alpha \in \mathbf{R}$ skalárra legyen definiálva az $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ és a $\alpha\mathbf{a}$ elem. Azt mondjuk, hogy a V halmaz e két művelettel *valós test feletti vektorteret* alkot, ha bármely $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in V$ elemre és $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ skalárra fennállnak az alábbi összefüggések:

(1) $\mathbf{a} + \mathbf{b} \in V$ (V az összeadásra nézve zárt);

(2) $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$ ($'+'$ kommutatív);

(3) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$ ($'+'$ asszociatív);

(4) $\exists \mathbf{o} \in V$, hogy $\mathbf{o} + \mathbf{a} = \mathbf{a}$ (létezik zéruselem);

(5) $\forall \mathbf{a} \exists \mathbf{b}$, hogy $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{o}$ (létezik additív inverz);

(6) $\alpha\mathbf{a} \in V$ (V zárt a skalárral való szorzásra);

(7) $\alpha(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \alpha\mathbf{a} + \alpha\mathbf{b}$;

(8) $(\alpha + \beta)\mathbf{a} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{a}$;

(9) $\alpha(\beta\mathbf{a}) = (\alpha\beta)\mathbf{a}$;

(10) $1\mathbf{a} = \mathbf{a}$;

Bármik is a V halmaz elemei, a V-ből képzett vektortér elemeit a vektortér *vektor*ainak nevezzük.

M A fenti definícóban a valós $\mathbf{R}$ test kicserélhető bármely más testre, így például a $\mathbf{C}$ testre, ekkor $\mathbf{C}$ test feletti vektortérről beszélünk. Ha külön nem említjük, a továbbiakban valós test feletti vektorterekről beszélünk.

20.T Tetszőleges test feletti V vektortérre igazak az alábbi állítások:

1. Csak egyetlen zéruselem létezik.

2. Minden $\mathbf{a} \in V$ vektornak egyetlen additív inverze létezik.
3. Minden $\mathbf{a} \in V$ vektorra: $0\mathbf{a} = \mathbf{o}$.
4. Minden $\alpha \in \mathbf{R}$ valósra: $\alpha\mathbf{o} = \mathbf{o}$.
5. Jelölje a tetszőleges $\mathbf{a} \in V$ elem additív inverzét $-\mathbf{a}$. E jelölés mellett $(-1)\mathbf{a} = -\mathbf{a}$.
6. Ha $\alpha\mathbf{a} = \mathbf{o}$, akkor $\alpha = 0$ vagy $\mathbf{a} = \mathbf{o}$.

P Néhány példa vektortérre:

1. az $\mathbf{R}^3$ tér origón áthaladó egy egyenesének (egy síkjának) pontjaiba mutató vektorok halmaza a szokásos vektorműveletekkel;
2. az $[a, b]$ intervallumon értelmezett folytonos függvények $C[a, b]$ halmaza (differenciálható függvények $D[a, b]$ halmaza) a függvények között értelmezett összeadás és valós számmal való szorzás műveletével;
3. az $m \times n$ típusú valós mátrixok a mátrixok összeadásának és valós skalárral való szorzásának szokásos műveletével valósok feletti vektorteret alkot;
4. az $m \times n$ típusú komplex mátrixok valós skalárral való szorzás esetén valós test feletti vektorteret ad, míg komplex skalárral való szorzás esetén komplex test feletti vektorteret;
5. a legfeljebb negyedfokú valósegyütthatós polinomok halmaza a szokásos polinomműveletekkel.

M A vektortér elemeinek *lineáris kombinációj*a, *lineáris függetlenség*e ugyanúgy definiálható, mint korábban.

21.D Egy V vektortér egy L részhalmazát a V *alter*ének nevezzük, ha L vektortér a V-beli összeadás és skalárral való szorzás műveletével.

22.T Legyen L a V vektortér egy nemüres részhalmaza. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek:

1. L altere V-nek;
2. tetszőleges $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in L$ és $\alpha \in \mathbf{R}$ esetén $\mathbf{a} + \mathbf{b} \in L$ és $\alpha\mathbf{a} \in L$ (azaz abból, hogy L eleget tesz-e a 19.D definíció tíz kikötésének, elég csak az (1)-t és az (5)-t ellenőrizni);
3. tetszőleges $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in L$ és $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ esetén $\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b} \in L$;
4. tetszőleges L-beli $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$ vektorok összes lináris kombinációja is L-ben van.

23.D Legyen V egy vektortér, $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k \in V$. Azt mondjuk, hogy a $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$ vektorok *kifeszítik* a V teret, ha V minden eleme előáll e vektorok lineáris kombinációjaként.

24.T Legyen V egy vektortér, $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k \in V$. Tekintsük az $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$ vektorok összes lineáris kombinációjának L halmazát. Ekkor L a V lineáris altere, melyet kifeszítenek az $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$ vektorok.

Bázis, dimenzió

25.D Legyen adva a V vektortérben egy $B = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ vektorrendszer. Azt mondjuk, hogy B bázis V-ben, ha B elemei lineárisan függetlenek, és kifeszítik V-t.

P Példák bázisra:

1. Az $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, \ldots, 0)$, $\ldots$ $\mathbf{e}_n = (0, 0, \ldots, 1)$, vektorok bázist alkotnak $\mathbf{R}^n$-ben. Ezt nevezzük $\mathbf{R}^n$ *standard bázis*ának.
2. Az 1, x, x^2, x^3 függvények bázist alkotnak a legfeljebb 3-adfokú polinomok vektorterében.

D Egy V vektortér *végesdimenziós*, ha van véges sok elemből álló bázisa.

26.T Egy végesdimenziós vektortér bármely két bázisa azonos számú vektorból áll.

27.D Egy végesdimenziós vektortér *dimenzió*ján valamely bázisának elemszámát értjük. A V vektortér dimenzióját $\dim(V)$ jelöli.

28.T
1. Ha V n-dimenziós vektortér, és $B = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ lineárisan független V-beli vektorokból áll, akkor B bázis.
2. Ha V n-dimenziós vektortér, és $B = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ kifeszíti V-t, akkor B bázis.

Sortér, oszloptér, rang

29.D Az $m \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrix n-dimenziós sorvektorai által kifeszített teret az $\mathbf{A}$ *sorter*ének, míg az m-dimenziós oszlopvektorok által kifeszített teret $\mathbf{A}$ *oszlopter*ének nevezzük.

30.T
a. Elemi sorműveletek közben a sortér nem változik.
b. Egy mátrix sorlépcsőssé transzformált alakjának nemzérus vektorai a sortér egy bázisát adják.

31.T
a. Elemi sorműveletek közben az oszlopvektorok közötti lineáris összefüggőségek nem változnak.
b. Egy mátrixnak azok az oszlopai, amelyekbe a sorlépcsős alakra hozás közben vezető egyes kerül, az oszlopvektorok egy maximális kineárisan független rendszerét adják, azaz e vektorok kifeszítik az oszlopteret.

32.T Egy mátrix sorterének és oszlopterének dimenziója mindig megegyezik.

33.D Egy *vektorrendszer rangján* a vektorok által kifeszített altér dimenzióját értjük, míg *mátrix rangján* a sorvektorai által kifeszített tér, vagyis a sortér dimenzióját. Egy $\mathbf{A}$ mátrix rangját $\operatorname{rang}(\mathbf{A})$, míg a $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m\}$ vektorrendszer rangját $\operatorname{rang}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m)$ jelöli.

34.T Legyen $\mathbf{A}_{m\times n}$ egy tetszőleges mátrix, az általa generált leképezést jelölje A, $\mathbf{A}$ sorvektorainak rendszerét jelölje S, oszlopvektorainak rendszerét O. Az alábbi állítások ekvivalensek:

1. $\operatorname{rang}(S) = r$;
2. $\operatorname{rang}(O) = r$;
3. $\operatorname{rang}(\mathbf{A}) = r$;
4. az S-ből kiválasztható lineárisan független vektorok számának maximuma r;
5. az O-ból kiválasztható lineárisan független vektorok számának maximuma r;
6. $\mathbf{A}$ sorterének dimenziója r;
7. $\mathbf{A}$ oszlopterének dimenziója r;
8. az A képterének dimenziója r;

35.T
a. Az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg, ha a $\mathbf{b}$ vektor benne van az $\mathbf{A}$ mátrix oszlopterében.

b. Az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg, ha $\mathbf{A}$ és $\left[\ \mathbf{A} \mid \mathbf{b}\ \right]$ oszloptere azonos.

c. Az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg, ha $\operatorname{rang}(\mathbf{A}) = \operatorname{rang}(\left[\ \mathbf{A} \mid \mathbf{b}\ \right])$.

d. Az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg egyértelműen, ha $\operatorname{rang}(\mathbf{A}) = \operatorname{rang}(\left[\ \mathbf{A} \mid \mathbf{b}\ \right]) = n$, ahol n az ismeretlenek száma.

Az $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ lineáris leképezések

36.D Legyen V és W két valós test feletti lineáris tér. Az $f\colon V \to W$ leképezést *lineáris leképezés*nek nevezzük, ha

1. f *homogén*, azaz bármely $\mathbf{v} \in V$ és $\alpha \in \mathbf{R}$ esetén $f(\alpha\mathbf{v}) = \alpha f(\mathbf{v})$;
2. f *additív*, azaz bármely $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ esetén $f(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v})$.

37.T Az előző definíció 1. és 2. pontja ekvivalens a következővel:

3. bármely $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ és $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ esetén $f(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) = \alpha f(\mathbf{u}) + \beta f(\mathbf{v})$.

P Példák lineáris leképezésre:

1. Legyen V az $[a, b]$ intervallumon differenciálható, W az $[a, b]$ intervallumon értelmezett függvények vektorterét. A $V \to W\colon g \mapsto g'$ leképezés (a differenciálás operátora) lineáris.
2. Legyen V az $[a, b]$ intervallumon folytonos függvények vektortere, és legyen $W = \mathbf{R}$. A $V \to W\colon g \mapsto \int_a^b g$ leképezés lineáris.

38.T
a. Ha $\mathbf{A}$ egy $m \times n$-es mátrix, akkor az $A\colon \mathbf{x} \mapsto \mathbf{Ax}$ leképezés egy $\mathbf{R}^n$-ből $\mathbf{R}^m$-be képező lineáris leképezés.

b. Ha $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ egy lineáris leképezés, akkor van olyan $m \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrix, hogy f megegyezik az $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{Ax}$ leképezéssel. Ha $\mathbf{R}^n$ standard bázisának elemeit $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots \mathbf{e}_n$ jelöli, akkor $\mathbf{A} = \left[\ f(\mathbf{e}_1) \mid f(\mathbf{e}_2) \mid \ldots \mid f(\mathbf{e}_n)\ \right]$.

Áttérés másik bázisra

39.M Legyen az $\mathbf{R}^2$ tér két tetszőleges bázisa $E = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ és $F = \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$. Fejezzük ki az F bázis elemeit az E bázisban:

$$[\mathbf{f}_1]_E = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{f}_2]_E = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix},$$

azaz

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_1 &= a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2 \\ \mathbf{f}_2 &= c\mathbf{e}_1 + d\mathbf{e}_2. \end{aligned}$$

Legyen egy tetszőleges $\mathbf{x}$ vektor koordinátás alakja az E bázisban legyen $[\mathbf{x}]_E = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, azaz $\mathbf{x} = x_1\mathbf{f}_1 + x_2\mathbf{f}_2$. Behelyettesítve a fenti egyenlőségeket a következőket kapjuk:

$$[\mathbf{x}]_E = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}_{F\to E} [\mathbf{x}]_F$$

Az $F \to E$ a mátrix indexében azt lejzi, hogy a mátrix az F bázisból az E-be való áttérés mátrixa. Általában, ha $E = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ és $F = \{\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n\}$ az $\mathbf{R}^n$ két bázisa, akkor az $F \to E$ áttérés mátrixa:

$$\left[\ [\mathbf{f}_1]_E \mid [\mathbf{f}_2]_E \mid \ldots \mid [\mathbf{f}_n]_E\ \right]$$

40.T Ha $\mathbf{C}$ az F-ből az E bázisba való áttérés mátrixa, akkor $\mathbf{C}$ invertálható, és az E-ből az F bázisba való áttérés mátrixa $\mathbf{C}^{-1}$.

41.D Az $\mathbf{R}^n$ egy bázisát *ortonormált*nak nevezzük, ha a bázis elemei páronként merőleges egységvektorok.

42.T Ha E és F egyaránt ortonormált bázisok, akkor az áttérés $\mathbf{C}$ mátrixára $\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{C}^T$, továbbá $\mathbf{C}$ sorvektorai és $\mathbf{C}$ oszlopvektorai is ortonormált rendszert alkotnak.

43.D A négyzetes $\mathbf{C}$ mátrixot *ortogonális*nak nevezzük, ha $\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{C}^T$.

44.T Legyen $E = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ és $F = \{\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n\}$ az $\mathbf{R}^n$ két bázisa, az $F \to E$ áttérés mátrixát jelölje $\mathbf{C}$. Legyen $A\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ egy lineáris leképezés. Ekkor az A leképezés mátrixa az E ill. F bázisban $[\mathbf{A}]_E = \left[\ [A(\mathbf{e}_1)]_E \mid \ldots \mid [A(\mathbf{e}_n)]_E\ \right]$, illetve $[\mathbf{A}]_F = \left[\ [A(\mathbf{f}_1)]_F \mid \ldots \mid [A(\mathbf{f}_n)]_F\ \right]$, és ezek között fennáll a következő összefüggés:

$$[\mathbf{A}]_F = \mathbf{C}^{-1}[\mathbf{A}]_E\mathbf{C}.$$

45.D Azt mondjuk, hogy az $\mathbf{A}$ és a $\mathbf{B}$ mátrixok *hasonló*ak, ha van olyan invertálható $\mathbf{C}$ mátrix, hogy $\mathbf{B} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{AC}$.

Determináns

A 2×2-es illetve a 3×3-as detemináns értéke megegyezik a sorvektorai által kifeszített paralelogramma előjeles területével illetve paralelepipedon előjeles térfogatával.

46.D Az $\mathbf{R}^n$ standard bázisának elemeit jelölje $\mathbf{e}_i$ ($i = 1, \ldots, n$). Legyenek $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots \mathbf{a}_n \in \mathbf{R}^n$ tetszőleges vektorok. E vektorok által kifeszített paralelepipedon *előjeles térfogatán* egy olyan n-dimenziós vektor-n-eseken értelmezett valós értékű függvényt értünk, melyre

(1) $f(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n) = 1$ (az egységkocka térfogata 1);

(2) $f(\mathbf{a}_1, \ldots, c\mathbf{a}_i, \ldots, \mathbf{a}_n) = cf(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_i, \ldots, \mathbf{a}_n)$;

(3) $f(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_i^*, \ldots, \mathbf{a}_n) + f(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_i^{**}, \ldots, \mathbf{a}_n) = f(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_i^* + \mathbf{a}_i^{**}, \ldots, \mathbf{a}_n)$;

(4) $f(\ldots, \mathbf{a}_i, \ldots, \mathbf{a}_j, \ldots) = -f(\ldots, \mathbf{a}_i, \ldots, \mathbf{a}_j, \ldots)$.

47.T Egyetlen olyan függvény van, mely a fenti tulajdonságokat teljesíti.

48.D Egy $n \times n$-es mátrix *determinánsá*n a sorvektorai által kifeszített paralelepipedon előjeles térfogatát értjük.

A determináns tulajdonságait lásd a példatárban.

Sajátérték, sajátvektor

49.D Azt mondjuk, hogy az $n \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrixnak (illetve az $A\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ lineáris leképezésnek) $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ nemzérus vektor *sajátvektora*, ha megadható egy olyan $\lambda \in \mathbf{R}$ szám, hogy $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$ (illetve $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$). E λ számot *sajátérték*nek nevezzük, az $\mathbf{x}$ vektort e sajátértékhez tartozó *sajátvektor*nak.

A definíció hasonlóan fogalmazható meg egy komplex elemű $\mathbf{A}$ mátrixra illetve egy $A\colon \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$ lineáris leképezésre is, ekkor $\mathbf{x} \in \mathbf{C}^n$ és $\lambda \in \mathbf{C}$.

50.D A $\lambda \mapsto \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ függvény λ polinomja, amit az $\mathbf{A}$ mátrix *karakterisztikus polinom*jának nevezünk, a $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$ egyenletet pedig az $\mathbf{A}$ *karakterisztikus egyenlet*ének.

51.T Legyen $\mathbf{A}$ egy $n \times n$-es mátrix. Ekkor a következők ekvivalensek:

(a) λ az $\mathbf{A}$ sajátértéke.

(b) A homogén lineáris $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ egyenletnek van nemtriviális megoldása.

(c) λ megoldása az $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$ karakterisztikus egyenletnek.

B (a) $\iff$ (b): λ az $\mathbf{A}$ sajátértéke $\iff$ $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$ és $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ $\iff$ $\mathbf{Ax} - \lambda\mathbf{Ix} = \mathbf{0}$ ($\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$) $\iff$ a $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ egyenletnek $\mathbf{x}$ nemtrivi megoldása.

(b) $\iff$ (c): a $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ homogén egyenletnek $\mathbf{x}$ nemtrivi megoldása $\iff$ az együtthatómátrix determinánsa 0 $\iff$ van olyan λ, hogy $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$.

Cramer-szabály, mátrix rangjának definíciója és mátrix inverzének meghatározása determinánsokkal: ld. példatár.