

1.  $\int \frac{x^2 + 2x}{x^2 + 1} dx =$

2.  $\int_0^\infty \frac{e^x}{e^{2x} + 1} dx =$

3.  $\int_0^1 \ln x dx =$

4. Az  $a, b$  paramétereiktől függően hány megoldása van a következő kibővített mátrixszal megadott egyenletrendszernek:

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & a+1 & b+3 \end{array} \right]$$

5.  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{A}^{-1} = ?$

6. Döntsük el, hogy igazak (I) vagy hamisak (H) az alábbi állítások. Legyen  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  egy  $n$  egyenletből álló,  $n$ -ismeretlenes egyenletrendszer, kibővített mátrixát jelölje  $\mathbf{A}'$ . A továbbiakban az egyenletrendszert (\*) jelöli.

- a) Ha  $\text{rang } \mathbf{A} = n$ , akkor (\*) megoldható.
- b) Ha  $\text{rang } \mathbf{A} = n$ , akkor (\*) egyértelműen megoldható.
- c) Ha  $\text{rang } \mathbf{A} < \text{rang } \mathbf{A}' = n$ , akkor (\*) megoldható.
- d) Ha  $\text{rang } \mathbf{A} = \text{rang } \mathbf{A}' < n$ , akkor (\*) megoldható, de nem egyértelműen.

e) Ha  $\det \mathbf{A} = 0$  és  $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ , akkor (\*) egyértelműen megoldható.

f) Ha  $\text{rang } \mathbf{A} < n$  és  $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ , akkor (\*) megoldható.

7. Melyik leképezés lineáris? Adjuk meg annak a mátrixát is!

- a)  $f(x, y, z) = (xy, z, x - y)$
- b)  $f(x, y, z) = (y + z, x, 0)$
- c)  $f(x, y, z) = (2, 3, x + y)$

8. Legyen  $V$  az  $(1, 0, 1)$ ,  $(1, 0, -1)$  és  $(1, 0, 0)$  vektorok által kifeszített vektortér.

- a)  $\dim V = ?$
- b) Adjuk meg  $V$  egy bázisát!

9. Döntsük el, hogy igazak (I) vagy hamisak (H) az alábbi állítások. Legalább az egyiket indokoljuk is! (3 pont)

- a) Ha  $\mathbf{v}$  sajátvektora  $\mathbf{A}$ -nak, akkor  $\mathbf{v}$  sajátvektora  $\mathbf{A}^2$ -nek is.
- b) Ha  $\sqrt{2}$  sajátértéke  $\mathbf{A}$ -nak, akkor  $\sqrt{2}$  sajátértéke  $\mathbf{A}^2$ -nek is.
- c) Ha  $\mathbf{B} = \mathbf{A}^3$ , akkor  $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ .
- d) Ha  $\mathbf{B} = \mathbf{A}^T$ , akkor  $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ .

10. Adjuk meg az  $y = 3x$  síkra való merőleges vetítés

- a) rangját
- b) sajátértékeit
- c) egy sajátvektorát
- d) Határozzuk meg a képtér és a magtér dimenzióját!
- e) Adjuk meg a képteret és a magteret!

11.  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}$ ,

- a)  $\text{rang } A = ?$
- b)  $\det A = ?$
- c)  $\det(A - I) = ?$