MAT B2 – 1. pótZH. / 1. rész – 2001-04-11 Név: ______________________ Gyakvez.: ________

1. Számítsuk ki az alábbi integrálokat: *(3+3 pont)*

a) $\int x \operatorname{arctg}(x)\,\mathrm{d}x =$

b) $\int_0^\infty x e^{-x^2}\,\mathrm{d}x =$

2. Tekintsük az alábbi mátrixokat: *(4 pont)*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

a) $(\mathbf{A}\mathbf{B}^T)^{-1} =$

b) $\operatorname{rang}(\mathbf{B}^T\mathbf{A}) =$

3. Legyen $\mathbf{A}$ $m \times n$-es mátrix, és tekintsük az $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ egyenletrendszert. Melyik igaz (I), melyik hamis (H) az alábbi állítások közül? *(2+2+2 pont)*

a) Ha $\operatorname{rang}(\mathbf{A}) = m$, akkor az egyenletrendszer megoldható. ☐

b) Ha $\operatorname{rang}(\mathbf{A}) = n$, akkor az egyenletrendszer megoldható. ☐

c) Ha az egyenletrendszer megoldható és $\operatorname{rang}(\mathbf{A}) = n$, akkor a megoldás egyértelmű. ☐

d) Ha az egyenletrendszer megoldható, akkor a kiegészített mátrix rangja megegyezik az $\mathbf{A}$ rangjával. ☐

e) Ha $\mathbf{A}$ rangja kisebb, mint a kiegészített mátrix rangja, akkor az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van. ☐

f) Ha az $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ egyenletrendszer megoldható, akkor az $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ is. ☐

4. Számítsuk ki az alábbi determináns értékét: *(3 pont)*

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

5. Határozzuk meg az $f : (x, y) \mapsto (2x - y, x + y)$ leképezés mátrixát az $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ illetve az $\{\mathbf{i}, \mathbf{i} - \mathbf{j}\}$ bázisban. *(5 pont)*

6. Adva van három vektor: $(1, 0, 1, 0)$, $(2, 1, 1, 0)$, $(1, 3, -2, 0)$.

a) Hány dimenziós az általuk kifeszített altér? *(3 pont)*

b) Adjunk meg olyan vektort, amelyik nincs ebben az altérben!

7. Írjuk fel a 3-dimenziós tér z-tengely körüli $180°$-os elforgatásának, mint lineáris leképezésnek a sajátértékeit és sajátvektorait! *(3 pont)*