

1. Számítsuk ki az alábbi integrálokat:

(3+3 pont)

a)  $\int \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx =$

b)  $\int_0^{\infty} x e^{-x} dx =$

4. Tekintsük azt a  $T$  lineáris leképezést, mely az  $\mathbf{R}^3$  vektorait az  $y = x, z = 0$  egyenletrendszerű egyenesre vetíti.

- a) Határozzuk meg  $T$  sajátértékeit és mindegyiknek egy-egy hozzá tartozó sajátvektorát!
- b) Határozzuk meg  $T$  rangját!
- c) Határozzuk meg  $T$  magterének dimenzióját!

Válaszainkat nagyon röviden indokoljuk! (5 pont)

2. Tekintsük az alábbi mátrixokat:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Végezzük el a kijelölt műveleteket, ahol lehet!  $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ ,  $\mathbf{AB}$ ,  $\mathbf{AB}^T$ ,  $\mathbf{A}^T + \mathbf{B}$ ,  $(\mathbf{AB})^{-1}$ ,  $(\mathbf{AB}^T)^{-1}$ . (4 pont)

5. Legyen  $\mathbf{A}$  egy  $5 \times 5$ -ös mátrix, melynek determinánsa 2! Számítsuk ki az alábbi determinánsok értékét! (2 pont)

- a)  $\det(3\mathbf{A}) =$
- b)  $\det(\mathbf{A}^3) =$
- c)  $\det(3\mathbf{A}^{-1}) =$

3. Melyik igaz (I), melyik hamis (H) az alábbi állítások közül? (2+2+2 pont)

- a) Ha  $\det(\mathbf{A}) = 0$ , akkor az  $\mathbf{A}$  mátrixnak legalább egyik sajátértéke 0.
- b) Ha  $\det(\mathbf{A}) = 0$ , akkor  $\mathbf{A}$  mindegyik sajátértéke 0.
- c) Ha  $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ , akkor az  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  egyenletrendszer megoldható.
- d) Ha  $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ , akkor az  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  egyenletrendszer egyértelműen megoldható.
- e) Ha  $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ , akkor az  $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$  egyenletrendszernek van nemtriviális megoldása.
- f) Ha  $\text{rang}(\mathbf{A}) =$  az ismeretlenek számával, akkor az  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  egyenletrendszer egyértelműen megoldható.

6. Az alábbi öt 4-dimenziós vektor közül válasszunk ki maximális számú lineárisan függetlent. Ennek alapján mennyi a vektorok által kifeszített altér dimenziója? A vektorok a következők:  $(0, 1, 0, 1)$ ,  $(1, 0, 0, 1)$ ,  $(-1, 1, 0, 0)$ ,  $(2, 0, 0, 2)$ ,  $(3, 1, 2, 4)$ . (4 pont)

7. Írjuk fel az  $xy$ -sík  $y = x$  egyenletű egyenesére való tükrözés mátrixát a standard bázisban, és az  $\{(1, 1), (-1, 1)\}$  vektorrendszer alkotta bázisban! (3 pont)