

1. Mi a hatása egy mátrixon végrehajtott elemi sorműveletnek? (3 pont)

- a) Ha egy mátrix egy sorát egy  $\lambda \in \mathbf{R}$  számmal szorozzuk, akkor rangja ...
- b) Ha egy mátrix két sorát felcseréljük, akkor determinánsa ...
- c) Az elemi sorműveletek hatása az oszlopok közti lineáris kapcsolatokra a következő: ...

2. Számítsuk ki a  $\mathbf{v}: [x, y, z] \mapsto [xy, yz, x^3]$  függvény divergenciáját, és írjuk fel az ezt megadó (definiáló) határértéket! (1+2 pont)

5. Az alábbi állítások közül melyik adja a mátrix rangjának meghatározását és melyik nem (a válasz legyen I vagy N). Amelyik nem, az egyetlen szó kijavításával igazgá tehető. A rossz szót húzzuk át a helyeset írjuk fölé! (4 pont):

- a) a mátrixból kiválasztható legnagyobb méretű nulla értékű determináns sorainak száma
- b) a mátrix oszlopvektorai közül kiválasztható valamely lineárisan független rendszer elemszáma
- c) az a legnagyobb  $r$  egész szám, amelyre igaz, hogy a mátrixnak nincs  $(r + 1) \times (r + 1)$ -es nem-nulla értékű al-determinánsa.
- d) a mátrix sorvektorai által kifeszített altér rendje.

6. Határozzuk meg a  $\mathbf{v}: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2: (x, y) \mapsto (x^2y^2, x - y)$  függvény  $(x_0, y_0) = (1, -1)$  ponthoz tartozó deriváltleképezésének mátrixát. E pont „kis környezetében” felvett tartomány területe közelítőleg hányszorosára változik e leképezés során? (3 pont)

3. Oldjuk meg az  $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$  egyenletrendszer mátrixinvertálással! (4 pont)

7. Potenciálos-e a  $\mathbf{v}: [x, y, z] \rightarrow [2x, z, y]$  függvény? Számítsuk ki e függvény  $\mathcal{G}$  görbe menti integrálját az  $A$  és  $B$  pontok között, ahol  $\mathcal{G}$  a  $z = 0$  egyenletű sík origó közepű, 1 sugarú körének első ténnyolcadba eső negyede, ahol  $A = (1, 0, 0)$ ,  $B = (0, 1, 0)$ . (4 pont)

4. Írjuk fel annak a lineáris leképezésnek a mátrixát, amely az  $\mathbf{R}^3$  teret a  $z$  tengely körül pozitív irányban  $60^\circ$ -kal elforgatja! Mik e leképezés (valós) sajátértékei és sajátvektorai? (4 pont)

8. Számítsuk ki az  $(x, y, z) \mapsto (0, 0, x^2 + y^2)$  függvény felületmenti integrálját azon az egységkörlapon, mely a  $z = 1$  síkban fekszik, és középpontja a  $z$ -tengelyen van. (5 pont)