MAT B2 – 2. ZH. – 2003. május 9. Név: ______________________ Gyakvez.: ________

1. Legyen $\mathbf{A}$ egy $n \times n$-es mátrix. Melyik igaz és melyik hamis a következő állítások közül? *(5 pont)*

a) $\operatorname{rang} \mathbf{A} = \operatorname{rang} \mathbf{A}^2$. ☐

b) Ha $\mathbf{A}$-nak sajátértéke a 0, akkor $\operatorname{rang} \mathbf{A} < n$. ☐

c) Ha $\mathbf{A}$ nem invertálható, akkor $\operatorname{rang} \mathbf{A} = 0$. ☐

d) Ha $\operatorname{rang} \mathbf{A}^2 < n$, akkor $\operatorname{rang} \mathbf{A} < n$. ☐

e) Ha $\det \mathbf{A} \neq 0$, akkor $\operatorname{rang} \mathbf{A} = n$. ☐

2. Adjuk meg az $\mathbf{r}(u,v) = (u^2, u - v, v)$ paraméterezésű felület érintősíkját az $(1,0,1)$ pontban! *(3 pont)*

3. Számítsuk ki az $(x,y) \mapsto (-y,x)$ függvény görbementi integrálját az $x^2 + y^2 = 1$ egyenletű kör mentén pozitív irányítás mellett. *(3 pont)*

4. Számítsuk ki az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ mátrix inverzét! *(3 pont)*

5. Írjuk fel annak a lineáris leképezésnek a mátrixát, amely az $\mathbf{R}^3$ teret a z tengely körül pozitív irányban 90°-kal elforgatja! *(3 pont)*

6. Mely állítások igazak az alábbiak közül? *(3 pont)*

a) Ha egy $\mathbf{v}\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ vektor-vektor függvény rotációja az egész $\mathbf{R}^3$ téren $\mathbf{0}$, akkor van olyan $u\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ függvény, hogy az egész téren $\mathbf{grad}\, u = \mathbf{v}$. ☐

b) Ha egy $\mathbf{v}\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ vektor-vektor függvény potenciálos az $\mathbf{R}^3$ téren, akkor ott rotációja $\mathbf{0}$. ☐

c) Ha egy $\mathbf{v}\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ vektor-vektor függvény kielégíti a $\mathbf{rot}\,\mathbf{grad}\operatorname{div} \mathbf{v} = \mathbf{0}$ egyenletet az egész $\mathbf{R}^3$ téren, akkor potenciálos is ott. ☐

7. Határozzuk meg a $\mathbf{v}\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2\colon (x,y) \mapsto (x + y^3, x^2 y)$ függvény $(x_0, y_0) = (2,1)$ ponthoz tartozó deriválttenzorának mátrixát. *(2 pont)*

8. Számítsuk ki az $\mathbf{r}(u,v) = (u+v, -v, u+1)$, $0 \le u \le 1$, $0 \le v \le 2$ egyenlettel megadott felületdarab felszínét! *(3 pont)*

9. Számítsuk ki az $(x,y,z) \mapsto (x - x^3, x^2 y, 2x^2 z)$ függvény felületmenti integrálját (egy megfelelő integrálredukciós tétel alkalmazásával) annak a kockának a felületén, melynek középpontja az origó, és minden csúcsának minden koordinátája 1 vagy -1. *(5 pont)*