## FÜGGVÉNYEK (X.)

- **Racionális egész függvény (polinom)**

$y = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, $(a_i \in \mathbb{R},\ i = 0, \ldots, n,\ a_n \neq 0)$

*Rolle gyöktétele:* Ha a $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, $(a_i \in \mathbb{Z},\ i = 0, \ldots, n)$ egyenletnek $p/q$ gyöke ($p$ és $q$ relatív prímek), akkor $p \,|\, a_0$, $q \,|\, a_n$.

- **Exponenciális és logaritmusfüggvény**

$\ln e^x = x$
$e^{\ln x} = x$
$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$
$\log_c ab = \log_c a + \log_c b$
$\log_c a = \log_d a / \log_d c$
$\log_c a^k = k \cdot \log_c a$

- **Trigonometrikus függvények és inverzeik**

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$
$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$
$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$
$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$

*Linearizáló formulák*
$(i)$ $\sin^2 x = (1 - \cos 2x)/2$
$(ii)$ $\cos^2 x = (1 + \cos 2x)/2$

$$\sin x = \frac{2\,\mathrm{tg}(x/2)}{1 + \mathrm{tg}^2(x/2)}$$
$$\cos x = \frac{1 - tg^2(x/2)}{1 + \mathrm{tg}^2(x/2)}$$

$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$
$\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$
$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$
$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$

| | $0°$ | $30°$ | $45°$ | $60°$ | $90°$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | $0$ | $\pi/6$ | $\pi/4$ | $\pi/3$ | $\pi/2$ |
| sin | $0$ | $1/2$ | $\sqrt{2}/2$ | $\sqrt{3}/2$ | $1$ |
| cos | $1$ | $\sqrt{3}/2$ | $\sqrt{2}/2$ | $1/2$ | $0$ |
| tg | $0$ | $\sqrt{3}/3$ | $1$ | $\sqrt{3}$ | – |
| ctg | – | $\sqrt{3}$ | $1$ | $\sqrt{3}/3$ | $0$ |

| térnegyed: | I. | II. | III. | IV. |
|---|---|---|---|---|
| sin | + | + | − | − |
| cos | + | − | − | + |

$\arcsin x + \arccos x = \pi/2$
$\mathrm{arctg}\, x + \mathrm{arcctg}\, x = \pi/2$
$\lim\limits_{x \to \infty} \mathrm{arctg}\, x = \pi/2$

- **Hiperbolikus függvények és inverzeik**

$\mathrm{sh}\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$
$\mathrm{ch}\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$
$\mathrm{th}\, x = \frac{\mathrm{sh}\, x}{\mathrm{ch}\, x}$
$\mathrm{cth}\, x = \frac{1}{\mathrm{th}\, x}$

$\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1$
$\mathrm{ch}\, 2x = \mathrm{ch}^2 x + \mathrm{sh}^2 x$
$\mathrm{sh}\, 2x = 2\,\mathrm{sh}\, x\,\mathrm{ch}\, x$
$\mathrm{sh}(x \pm y) = \mathrm{sh}\, x\,\mathrm{ch}\, y \pm \mathrm{ch}\, x\,\mathrm{sh}\, y$
$\mathrm{ch}(x \pm y) = \mathrm{ch}\, x\,\mathrm{ch}\, y \pm \mathrm{sh}\, x\,\mathrm{sh}\, y$

*Linearizáló formulák:*
$(i)$ $\mathrm{sh}^2 x = \frac{1}{2}(\mathrm{ch}\, 2x - 1)$
$(ii)$ $\mathrm{ch}^2 x = \frac{1}{2}(\mathrm{ch}\, 2x + 1)$

$\mathrm{arsh}\, x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$
$\mathrm{arch}\, x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$
$\mathrm{arth}\, x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$, $(|x| < 1)$
$\mathrm{arcth}\, x = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}$, $(|x| > 1)$
$\lim\limits_{x \to \infty} \mathrm{th}\, x = 1$

## DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS (IX., XI.)

$D = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, ill.
$f(x) - f(x_0) = D \cdot (x - x_0) + \varepsilon(x)(x - x_0)$,
ahol $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$

- **Deriválási szabályok**

$(f + g)' = f' + g'$
$(cf)' = cf'$
$(fg)' = f'g + fg'$
$(f/g)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$
$f\big(g(x)\big) = f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x)$

Ha $f$ inverze $g$, és $f(x) = y$, azaz $g(y) = x$, akkor
$f'(x) = 1/g'(y)$.

Ha $y(x)$ paraméteres (azaz $x = x(t)$, és $y = y(t)$), akkor
$y'(x) = \dot{y}(t)/\dot{x}(t)$, ahol $\dot{x}(t) \neq 0$, és
$y''(x) = (\ddot{y}\dot{x} - \ddot{x}\dot{y})/\dot{x}^3$, ahol $\dot{x}(t) \neq 0$.

- **Függvénygörbék érintkezése**

$f(x)$ $x_0$-beli *érintőjének* egyenlete:
$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

$f(x)$-hez tartozó nem függőleges *aszimptoták* egyenlete:
$y = mx + b$, ahol $m = \lim\limits_{x \to \infty} (f(x)/x)$, és $b = \lim\limits_{x \to \infty} \big(f(x) - mx\big)$ ($\lim\limits_{x \to -\infty}$ adja a másikat).

$f(x)$ $x_0$-beli *simulókörének* középpontja $(u, v)$, és sugara $r$, ahol:
$f(x_0) - v = -\frac{1 + f'^2(x_0)}{f''(x_0)}$;
$x_0 - u = f'(x_0) \frac{1 + f'^2(x_0)}{f''(x_0)}$;
$r = \frac{\left(1 + f'^2(x_0)\right)^{3/2}}{|f''(x_0)|}$.

- **Függvények és deriváltjaik**

| $f$ | $f'$ |
|---|---|
| $x^n$ | $nx^{n-1}$ |
| $e^x$ | $e^x$ |
| $a^x$ $(a>0)$ | $a^x \ln a$ |
| $x^x$ | $x^x(1+\ln x)$ |
| $\sin x$ | $\cos x$ |
| $\cos x$ | $-\sin x$ |
| $\operatorname{tg} x$ $(x \neq k\pi + \frac{\pi}{2})$ | $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$ |
| $\operatorname{ctg} x$ $(x \neq k\pi)$ | $-\frac{1}{\sin^2 x} = -1 - \operatorname{ctg}^2 x$ |
| $\operatorname{sh} x$ | $\operatorname{ch} x$ |
| $\operatorname{ch} x$ | $\operatorname{sh} x$ |
| $\operatorname{th} x$ | $\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} = 1 - \operatorname{th}^2 x$ |
| $\operatorname{cth} x$ $(x \neq 0)$ | $-\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} = 1 - \operatorname{cth}^2 x$ |
| $\ln x$ $(x>0)$ | $1/x$ |
| $\log_a x$ $(x>0)$ | $1/(x \ln a)$ |
| $\arcsin x$ $(\lvert x\rvert<1)$ | $1/\sqrt{1-x^2}$ |
| $\arccos x$ $(\lvert x\rvert<1)$ | $-1/\sqrt{1-x^2}$ |
| $\operatorname{arctg} x$ | $1/(1+x^2)$ |
| $\operatorname{arcctg} x$ | $-1/(1+x^2)$ |
| $\operatorname{arsh} x$ | $1/\sqrt{x^2+1}$ |
| $\operatorname{arch} x$ | $1/\sqrt{x^2-1}$ |
| $\operatorname{arth} x$ $(\lvert x\rvert<1)$ | $1/(1-x^2)$ |
| $\operatorname{arcth} x$ $(\lvert x\rvert>1)$ | $1/(1-x^2)$ |

A legalább $n$-szer differenciálható $f$ függvény $n$-edik *Taylor-polinomja*:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.$$

A maradéktag:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$ ahol $\xi \in (x, x_0)$, vagy $\xi \in (x_0, x)$.

| | $f^{(k)}(x_0)=0$, ha $0<k<n$ | |
|---|---|---|
| | $f^{(n)}(x_0)>0$ | $f^{(n)}(x_0)<0$ |
| $n$ páros | minimum | maximum |
| $n$ páratlan | növekvő | csökkenő |

| | $f^{(k)}(x_0)=0$, ha $1<k<n$ | |
|---|---|---|
| | $f^{(n)}(x_0)>0$ | $f^{(n)}(x_0)<0$ |
| $n$ páros | konvex | konkáv |
| $n$ páratlan | $x_0$-ban inflexiós pont van | |

## INTEGRÁL (XII., XIII.)

- **Integrálási szabályok**

Legyen $a, b, c, n, C \in \mathbb{R}$, $n \neq -1$, $a \neq 0$, $F' = f$; ekkor:

$\int (cf) = c \int f$
$\int (f+g) = \int f + \int g$
$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$
$\int (f^n f') = \frac{1}{n+1} f^{n+1} + C$
$\int (f'/f) = \ln|f| + C$
$\int f\big(g(t)\big)g'(t)dt = F\big(g(t)\big) + C$

- **Primitív függvények**

| $f(x)$ | $\int f(x)dx$ |
|---|---|
| $x^n$ | $\frac{1}{n+1}x^{n+1}$ |
| $1/x$ | $\ln\lvert x\rvert$ |
| $e^x$ | $e^x$ |
| $a^x$ $(a>0)$ | $a^x/\ln a$ |
| $\sin x$ | $-\cos x$ |
| $\cos x$ | $\sin x$ |
| $1/\cos^2 x$ | $\operatorname{tg} x$ |
| $1/\sin^2 x$ | $-\operatorname{ctg} x$ |
| $\operatorname{sh} x$ | $\operatorname{ch} x$ |
| $1/\operatorname{ch}^2 x$ | $\operatorname{th} x$ |
| $1/\operatorname{sh}^2 x$ | $-\operatorname{cth} x$ |
| $1/\sqrt{1-x^2}$ | $\arcsin x$ |
| $-1/\sqrt{1-x^2}$ | $\arccos x$ |
| $1/(1+x^2)$ | $\operatorname{arctg} x$ |
| $1/(a^2+x^2)$ | $(1/a)\operatorname{arctg}(x/a)$ |
| $1/\sqrt{x^2+1}$ | $\operatorname{arsh} x$ |
| $1/\sqrt{x^2-1}$ | $\operatorname{arch} x$ |
| $1/(1-x^2)$ | $\operatorname{arth} x$ $(\lvert x\rvert<1)$ |
| $1/(1-x^2)$ | $\operatorname{arcth} x$ $(\lvert x\rvert>1)$ |

- **Parciális integrálás**

$\int (u'v) = uv - \int (uv')$

Legyen $p(x)$ polinom, $t_i(x)$ a $\sin x, \cos x, \operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x, e^x$ valamelyike, $-1 \neq r \in \mathbb{R}$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $a(x)$ arcus vagy area függvény. Parciális integrálást alkalmazhatunk a következő integráloknál:

(i) $\int t(ax+b)p(x)dx$ (annyi parciális integrálás, amennyi $p(x)$ foka);
(ii) $\int x^r \ln^n x dx$ ($n$ parciális integrálással);
(iii) $\int t_1(ax+b)t_2(cx+d)dx$ (2 parciális integrálással);
(iv) $\int p(x)a(x)dx$

- **Helyettesítés**

$\int f(x)dx = \int f\big(u(t)\big)u'(t)dt$, ahol $x = u(t)$

Speciális esetek:

| Típus | Helyettesítés | $dx/dt$ |
|---|---|---|
| $R(\sin x, \cos x)$ | $\operatorname{tg}(x/2) = t$<br>$\sin x = \dfrac{2t}{(1+t^2)}$<br>$\cos x = \dfrac{(1-t^2)}{(1+t^2)}$ | $\dfrac{2}{(1+t^2)}$ |
| $R(e^x)$ | $e^x = t$<br>$x = \ln t$ | $\dfrac{1}{t}$ |
| $R(x, \sqrt{1-x^2})$ | $x = \sin t$<br>$\sqrt{1-x^2} = \cos t$ | $\cos t$ |
| $R(x, \sqrt{x^2+1})$ | $x = \operatorname{sh} t$<br>$\sqrt{x^2+1} = \operatorname{ch} t$ | $\operatorname{ch} t$ |
| $R(x, \sqrt{x^2-1})$ | $x = \operatorname{ch} t$ $(x>0)$<br>$\sqrt{x^2-1} = \operatorname{sh} t$ | $\operatorname{sh} t$ |

- **Területszámítás**

Görbevonalú trapéz:
$\int_a^b |f(x)|\,dx$
Görbevonalú trapéz paraméteres megadással:
$\int_a^b |\dot{x}(t)y(t)|\,dt$
Az $r(\varphi)$ függvény által meghatározott szektor az $[\alpha,\beta]$ intervallumban:
$\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)d\varphi$
Szektor paraméteres megadással:
$\frac{1}{2}\int_a^b |x(t)\dot{y}(t)-\dot{x}(t)y(t)|\,dt$

- **Ívhossz**

Az $y=f(x)$ görbe:
$s=\int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}dx$
Paraméteresen megadott görbe:
$s=\int_a^b \sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)}dt$
Polárkoordinátás görbe:
$s=\int_\alpha^\beta \sqrt{r^2(\varphi)+\dot{r}^2(\varphi)}d\varphi$

- **Kettős és hármas integrál transzformációja**

Jacobi-determináns az $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$ függvénynél:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}$$

Jacobi-determináns az $x=x(u,v,w)$, $y=y(u,v,w)$, $z=z(u,v,w)$ függvénynél:

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w}\\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w}\end{vmatrix}$$

$$\iint f(x,y)dxdy=\iint f\big(x(u,v),y(u,v)\big)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|dudv$$

Speciális esetek:

| | transzf. függv. | \|Jacobi-det.\| |
|---|---|---|
| polárkoord. | $x=r\cos\varphi$<br>$y=r\sin\varphi$ | $r$ |
| hengerkoord. | $x=r\cos\varphi$<br>$y=r\sin\varphi$<br>$z=m$ | $r$ |
| gömbi koord. | $x=r\sin\vartheta\cos\varphi$<br>$y=r\sin\vartheta\sin\varphi$<br>$z=r\cos\vartheta$ | $r^2\sin\vartheta$ |

## TÖBBVÁLT. FÜGGVÉNYEK (XIV., XV.)

$\mathbf{grad}\, f(x,y,z)=(f'_x,f'_y,f'_z)$
Iránymenti derivált:
$f'_{\mathbf{e}}(P_0)=\mathbf{e}\,\mathbf{grad}\, f(P_0)$,
$f'_\alpha=f'_x\cos\alpha+f'_y\sin\alpha\quad(\mathbf{e}=(\cos\alpha,\sin\alpha))$.
Összetett függvény parciális deriválása:
$f(x,y)=f\big(u(x,y),v(x,y)\big)$,
$f'_x=f'_u u'_x+f'_v v'_x$,
$f'_y=f'_u u'_y+f'_v v'_y$,
Teljes differenciál: $df=\mathbf{h}\,\mathbf{grad}\, f$
(2-változós függvényre: $df=f'_x dx+f'_y dy$).
Szélsőérték:
$f'_x(P_0)=f'_y(P_0)=0$,
$f''_{xx}(P_0)f''_{yy}(P_0)-f''^2_{xy}(P_0)>0$:
minimum, ha $f''_{xx}(P_0)>0$, és
maximum, ha $f''_{xx}(P_0)<0$.
Többváltozós esetben a bal felső sarokaldeterminánsok vizsgálandók:
minimum, ha $++++\cdots$, és
maximum, ha $-+-+\cdots$.

## DIFFERENCIÁLGEOMETRIA (XVII.)

| görbe | irányvektor | ívhossz |
|---|---|---|
| $\mathbf{r}(t)$,<br>$a\le t\le b$ | $\dot{\mathbf{r}}(t)$ | $\int_a^b |\dot{\mathbf{r}}(t)|\,dt$ |
| $\mathbf{r}(u,v)$,<br>$u=u(t)$,<br>$v=v(t)$,<br>$a\le t\le b$ | $\dot{\mathbf{r}}(t)=$<br>$\mathbf{r}_u\dot{u}+\mathbf{r}_v\dot{v}$ | $\int_a^b\sqrt{E\dot{u}^2+2F\dot{u}\dot{v}+G\dot{v}^2}dt$,<br>$E=\mathbf{r}_u^2$,<br>$F=\mathbf{r}_u\mathbf{r}_v$,<br>$G=\mathbf{r}_v^2$ |

| felület | normálvektor ($\mathbf{n}$) | felszín |
|---|---|---|
| $\mathbf{r}(u,v)$<br>$(u,v)\in D$ | $\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v$ | $\iint_D |\mathbf{n}|\,dudv=$<br>$\iint_D\sqrt{EG-F^2}dudv$ |
| $z=z(x,y)$<br>$(x,y)\in T$ | $(-z'_x,-z'_y,1)$ | $\iint_T\sqrt{1+{z'_x}^2+{z'_y}^2}dxdy$ |
| $f(x,y,z)=0$<br>$(x,y)\in T$ | $(f'_x,f'_y,f'_z)$ | $\iint_T\frac{\sqrt{{f'_x}^2+{f'_y}^2+{f'_z}^2}}{|f'_z|}dxdy$ |

- **Kísérő triéder**

Érintő egységvektor $\mathbf{t}$,
főnormális egységvektor $\mathbf{n}$,
binormális egységvektor $\mathbf{b}$;

simulósík: $\mathbf{t}$ és $\mathbf{n}$ síkja,
normálsík: $\mathbf{n}$ és $\mathbf{b}$ síkja,
rektifikáló sík: $\mathbf{b}$ és $\mathbf{t}$ síkja.

| | ívhossz par. | tetsz. par. |
|---|---|---|
| $\mathbf{t}$ | $\mathbf{r}'(s)$ | $\dot{\mathbf{r}}(t)/|\dot{\mathbf{r}}(t)|$ |
| $\mathbf{n}$ | $\mathbf{r}''(s)/|\mathbf{r}''(s)|$ | $\mathbf{b}(t)\times\mathbf{t}(t)$ |
| $\mathbf{b}$ | $\mathbf{t}(s)\times\mathbf{n}(s)$ | $\frac{\dot{\mathbf{r}}(t)\times\ddot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)\times\ddot{\mathbf{r}}(t)|}$ |
| görbület | $|\mathbf{r}''(s)|$ | $\frac{|\dot{\mathbf{r}}(t)\times\ddot{\mathbf{r}}(t)|}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|^3}$ |
| torzió | $\frac{\mathbf{r}'(s)\mathbf{r}''(s)\mathbf{r}'''(s)}{|\mathbf{r}''(s)|^2}$ | $\frac{\dot{\mathbf{r}}(t)\ddot{\mathbf{r}}(t)\dddot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)\times\ddot{\mathbf{r}}(t)|^2}$ |