

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|

Σ:

1. (5) Bizonyítsuk be, hogy ha az

$$y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_2(x)y(x) = 0$$

differenciálegyenletben szereplő a_1, a_2 függvények folytonosak a $[c, d]$ intervallumon, akkor minden $x_0 \in (c, d)$ esetén az $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1$ ($y_0, y_1 \in \mathbb{R}$) k.é.p. egyértelműen megoldható.

2. (3) Mutassuk meg, hogy egy mindenütt értelmezett, bármely véges intervallumon integrálható $2p$ szerint periodikus függvény integrálja bármely $2p$ hosszúságú intervallumon azonos!

3. (3) Tegyük fel, hogy a $|c_n(w - a)^n|$ sorozat korlátos és $|z - a| < |w - a|$. Mutassuk meg, hogy a

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n(z - a)^n|$$

sor konvergens ($a, z, w \in \mathbb{C}$ komplex konstansok).

4. (3) Az Euler-tételből kiindulva fejezzük ki a komplex változós sin függvényt az sh és az ch függvényt a sin függvény segítségével!

5. (4) Milyen alakban kereshetjük az $y'''(x) - 4y''(x) + 4y'(x) = f(x)$ differenciálegyenlet egyik partikuláris megoldását, ha

a) $f(x) = 2xe^{2x}$:

b) $f(x) = 2 \cos 2x$:

c) $f(x) = 2x^2$:

6. (4) Végezzük el az alábbi sorfejtéseket!

(a) A $\sin z$ függvény Maclaurin-sora:

(b) A $\sin x$ függvény Fourier-sora:

(c) Az $\frac{1}{1+z}$ függvény 0-körüli Laurent-sora:

7. (3) Számítsuk ki az $\int_{|z|=1} \bar{z} dz$ integrál értékét!

8. (2) Írjuk fel a rezgő húr differenciálegyenletét és azt, hogy milyen alakban keressük a megoldását!

9. (7) Adjunk (elégsséges) feltételt arra, hogy

- egy komplex f függvény integrálja egy T tartomány bármely zárt görbájén 0 legyen.

- egy $P(x, y) + Q(x, y)y' = 0$ differenciálegyenlet egzakt legyen.

- a $(0, \infty)$ minden véges részintervallumán integrálható $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ függvény Laplace-transzformáltja a $\{p \mid \operatorname{Re} p > c\}$ félsíkban létezzék!

- az $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ függvény z_0 izolált szingularitási helyének bármely környezetében felvegye legfeljebb 1 kivétellel \mathbb{C} minden értékét.

10. (3) Definiáljuk a következő fogalmakat!

(a) az f függvény reguláris z_0 -ban:

(b) szukcesszív approximáció:

11. (3) Tekintsük a következő két állítást: (a) f és g Wronski-determinánsa legalább egy pontban nem 0; (b) f és g lineárisan függetlenek. Milyen irányú implikáció igaz közöttük? Amelyik nem igaz, arra adjunk ellenpéldát!