

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----

Σ:

1. (3) Bizonyítsuk be az Euler-formulát!
2. (5) Bizonyítsuk be a Picard – Lindelöf-tétel feltételeinek ellenőrzésével, hogy ha az

$$y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y(x) = 0$$

differenciálegyenletben szereplő a és b függvények folytonosak a $[c, d]$ intervallumon, akkor minden $\xi \in (c, d)$ esetén az $y(\xi) = \eta_0, y'(\xi) = \eta_1$ ($\eta_0, \eta_1 \in \mathbb{R}$) k.é.p. egyértelműen megoldható.

3. (3) Mutassuk meg, hogy $n \neq -1$ ($n \in \mathbf{Z}$) esetén

$$\int_{|z-a|=R} (z-a)^n dz = 0,$$

ahol $a \in \mathbb{C}, R \in \mathbb{R}^+$.

4. (4) Soroljuk fel, hogy milyen feltételek teljesülése esetén igaz, hogy egy D halmazon a $P(x, y) + y'Q(x, y) = 0$ differenciálegyenlet akkor és csak akkor egzakt, ha $P'_x(x_0, y_0) = Q'_y(x_0, y_0)$ a D minden (x_0, y_0) pontjában. Ezután bizonyítsuk be a „csak akkor” részt.

5. (3) Milyen alakban kereshetjük az $y''(x) - 4y'(x) + 13y(x) = f(x)$ differenciálegyenlet egyik partikuláris megoldását, ha

a) $f(x) = e^{2x} + \cos 3x$:

b) $f(x) = e^{2x} \cos 3x$:

6. (3) Számítsuk ki e^{at} Laplace-transzformáltját!

7. (3) A Cauchy-féle integrálformulák alkalmazásával számítsuk ki az $\int_{|z-1|=1/2} \frac{2z-1}{z^2-z} dz$ integrál értékét!

8. (2) Írjuk fel a rezgő húr differenciálegyenletét és azt, hogy milyen alakban keressük a megoldását!

9. (3) Végezzük el az alábbi sorfejtéseket!

(a) A $\cos z$ függvény Maclaurin-sora:

(b) Az $\frac{1}{1+z}$ függvény 0-körüli Laurent-sora $|z| > 1$ gyűrűn:

10. (3) Adjunk (pl. valamely tanult tétel alapján) elégséges feltételt arra, hogy

- egy x_0 körüli hatványsor összegfüggvényének x -beli deriváltját tagonkénti deriválással kaphassuk meg.

- az $y' = f(x)g(y), y(\xi) = \eta$ kezdetiérték-probléma egyértelműen megoldható legyen.

11. (8) Válaszoljunk az alábbi kérdésekre. Ha az állítás igaz, indokoljunk. Hamis állítás esetén adjunk olyan további feltételeket, melyek esetén igazzá válik, vagy adjunk ellenpéldát!

a) Egyenlő lehet-e egy nem folytonos, periodikus függvény saját Fourier-sorának összegfüggvényével?

b) Igaz-e, hogy ha léteznek a kétváltozós u és v függvények parciális deriváltjai az (x_0, y_0) pontban, és ott eleget tesznek a Cauchy–Riemann-féle differenciálegyenleteknek, akkor az $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ($z = x + iy$) függvény differenciálható az $x_0 + iy_0$ pontban?

c) Igaz-e, hogy egy f függvény Taylor-sorának összegfüggvénye mindenütt megegyezik f -fel.

d) Igaz-e, hogy ha az $[a, b]$ intervallumon értelmezett f és g függvény lineárisan független, akkor Wronsky-determinánsuk legalább egy $\xi \in [a, b]$ pontban nem 0.