

1. Határozzuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n\sqrt{n}}(x+1)^{n/2}$ függvény sor konvergenciatartományát! (8 pont)

Megoldás: A függvény sor értelmezési tartománya $[-1, \infty)$. Használjuk a gyökkritériumot a konvergenciatartomány meghatározásához! $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{n\sqrt{n}}|x+1|^{n/2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{x+1}}{(\sqrt[n]{n})^{3/2}} = 2\sqrt{x+1}$. Így a sor konvergens, ha $2\sqrt{x+1} < 1$, azaz, ha $x+1 < \frac{1}{4}$, azaz $x < -\frac{3}{4}$ (és persze $x \geq -1$), divergens, ha $2\sqrt{x+1} > 1$, azaz $x > -\frac{3}{4}$. $x = -\frac{3}{4}$ esetén a sor $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n\sqrt{n}}(1/4)^{n/2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$ konvergens, mert $\sum \frac{1}{n^p}$ konvergens, ha $p > 1$. Tehát a konvergenciatartomány $[-1, -\frac{3}{4}]$.

2. Legyen f egy 2π periódusú függvény, amelyre $f(x) = 1$, ha $0 < x < \pi$ és $f(x) = -1$, ha $\pi < x < 2\pi$. Határozzuk meg az f Fourier-sorát! (8 pont)

Megoldás: Ha felrajzoljuk a függvényt a $[-\pi, \pi]$ periódusán, akkor látjuk, hogy páratlan. Így Fourier-sora $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ alakú. Az együtthatók értéke: $b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin nx dx = \frac{2}{\pi} [-\frac{1}{n} \cos(nx)]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi n}(1 - (-1)^n)$, ami $\frac{4}{\pi n}$ -nel egyenlő páratlan n esetén, és 0-val, amikor n páros. Így az f Fourier-sora $\sum_{1 \leq n \text{ páratlan}} \frac{4}{\pi n} \sin(nx) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k+1)} \sin((2k+1)x)$.

3. Határozzuk meg az összes olyan z komplex számot, amelyre $\sin z = ie^{-iz}$. (7 pont)

Megoldás:

$$\sin z = ie^{-iz}$$

$$-i \operatorname{sh} iz = ie^{-iz}$$

$$-\frac{i}{2}(e^{iz} - e^{-iz}) = ie^{-iz}$$

$$-e^{iz} + e^{-iz} = 2e^{-iz}$$

$$e^{iz} = -e^{-iz}$$

$$e^{2iz} = -1 = \cos \pi + i \sin \pi$$

$$2iz = i(\pi + 2k\pi) = i(2k+1)\pi$$

$$z = \frac{2k+1}{2}\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

4. Számítsuk ki az $f(z) = \frac{e^{\pi z}}{z^4 + z^2}$ függvény integrálját a $|z - \frac{1}{2} - i| = 1$ egyenletű körön, pozitív irányítással! (7 pont)

Megoldás: f szingularitásai a $z^4 + z^2$ polinom gyökei, tehát $z = 0, \pm i$. Ezek közül csak $z = i$ esik a kör belsőjébe. A Cachy-féle integrálformulát alkalmazva $\int_{\mathcal{G}} f(z) dz = \int_{\mathcal{G}} \frac{e^{\pi z}}{z^2(z+i)} dz = \frac{2\pi i}{0!} \frac{e^{\pi z}}{z^2(z+i)} \Big|_{z=i} =$

$$2\pi i \frac{e^{\pi i}}{-2i} = \frac{-2\pi i}{-2i} = \pi.$$