1. *Határozzuk meg az alábbi függvénysorok konvergenciatartományát, és a második függvénysor összegfüggvényét!* *a)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{\sqrt{x}}$ *b)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(x+8)^{3n}$ *(2+10 pont)*

Megoldás: a) $\sqrt{x} \geq 0$ minden olyan x-re, amire értelmezve van, így $n^{\sqrt{x}} \geq 1$ a sor értelmezési tartományán, következésképpen a sor sehol nem konvergens, mert a tagok nem tartanak 0-hoz.

b) Legyen $y = (x+8)^3$. Az $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ny^n$ sor konvergenciasugara $\lim 1/\sqrt[n]{n} = 1$, és a konvergenciatartománya $(-1,1)$, mert a határpontokon nyilván divergens (a tagok nem tartanak 0-hoz). Így az eredeti sor pontosan akkor konvergens, ha $|(x+8)^3| < 1$, azaz a konvergenciatartománya $(-9,-7)$. Az y-ra felírt hatványsor összegfüggvénye $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ny^n = y \cdot \sum\limits_{n=1}^{\infty} ny^{n-1} =$ $y \cdot \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} y^n\right)' = y \cdot \left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} y^n\right)' = y \cdot \left(\frac{1}{1-y}\right)' = \frac{y}{(1-y)^2}$, így az eredeti sor összegfügvénye $\frac{(x+8)^3}{(1-(x+8)^3)^2}$.

2. *a) Adjuk meg az xe^{-x^2+2} függvény 0 körüli Taylor-sorát!*
b) Adjuk meg a $z^2e^{i/z}$ függvény 0 körüli Laurent-sorát, és számítsuk ki ennek a függvénynek az integrálját a $|z| = 2$ körön! *(3+7 pont)*

Megoldás: a) $xe^{-x^2+2} = e^2 \cdot xe^{-x^2} = e^2x \cdot \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(-x^2)^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{e^2(-1)^n}{n!}x^{2n+1}$

b) $z^2e^{i/z} = z^2 \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(\frac{i}{z})^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!}z^{-n+2}$. Itt z^{-1} együtthatója ($n = 3$-nál) $i^3/6 = -i/6$, tehát ez a függvény reziduuma 0-ban, és ebből az integrál értéke $-i\pi/3$.

3. *Határozzuk meg az összes olyan z komplex számot, amelyre $\operatorname{tg} z = 2i$.* *(8 pont)*

Megoldás:

$$\sin z = 2i \cos z$$

$$-i \operatorname{sh} iz = 2i \operatorname{ch} iz$$

$$-i(e^{iz} - e^{-iz})/2 = 2i(e^{iz} + e^{-iz})/2$$

$$-e^{iz} + e^{-iz} = 2e^{iz} + 2e^{-iz}$$

$$3e^{2iz} + 1 = 0$$

$$e^{2iz} = -1/3 = \frac{1}{3}(\cos\pi + i\sin\pi)$$

$$2iz = \ln(1/3) + i(2k+1)\pi$$

$$z = \frac{2k+1}{2}\pi - \frac{1}{2}i\ln 1/3 = \frac{2k+1}{2}\pi + i\frac{\ln 3}{2}$$

4. *Legyen $f(x) = [x]$, ha $2 \leq x < 4$, és tegyük fel, hogy $f(x) = f(x+2)$ igaz minden x-re. ($[x]$ az x egész részét jelöli, azaz azt a legnagyobb egész számot, ami nem nagyobb x-nél.) Határozzuk meg f Fourier-sorát! Rajzoljuk fel f-nek és Fourier-sora összegfüggvényének a grafikonját a $[0,6]$ intervallum fölött!* *(10 pont)*

Megoldás: $f(x)=2$ a $\ldots, [-2,-1), [0,1), [2,3), [4,5), \ldots$ intervallumokon és $f(x)=3$ minden más helyen. A Fourier-sor grafikonja annyiban különbözik f grafikonjától, hogy az az x egész értékein $\frac{5}{2}$-et vesz fel. A függvény periódusa $2p=2$. f Fourier-sora $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \cos a_n(\pi n x)+b_n \sin(\pi n x)$. Itt $b_0=0$, $a_0=\frac{1}{2}(\int\limits_0^1 2\,dx+\int\limits_1^2 3\,dx)=\frac{5}{2}$, továbbá $n\geq 1$-re $a_n=\int\limits_0^1 2\cos(n\pi x)\,dx+\int\limits_1^2 3\cos(n\pi x)\,dx=[\frac{2}{n\pi}\sin(n\pi x)]_0^1+[\frac{3}{n\pi}\sin(n\pi x)]_1^2=0$, és $b_n=\int\limits_0^1 2\sin(n\pi x)\,dx+\int\limits_1^2 3\sin(n\pi x)\,dx=[\frac{-2}{n\pi}\cos(n\pi x)]_0^1+[\frac{-3}{n\pi}\cos(n\pi x)]_1^2=\frac{-1}{n\pi}+\frac{1}{n\pi}(-1)^n=\frac{1}{n\pi}(-1+(-1)^n)$, és ez 0, ha n páros, és $\frac{-2}{n\pi}$, ha n páratlan. Tehát a Fourier-sor $\frac{5}{2}+\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{-2}{(2k+1)\pi}\sin((2k+1)\pi x)$.

5. *Hol differenciálható és hol reguláris az $f(z)=(1-|z|)^2$ függvény?* (*10 pont*)

Megoldás: $f(x+yi)=(1-\sqrt{x^2+y^2})^2=1+x^2+y^2-2\sqrt{x^2+y^2}$ tehát $u(x,y)=1+x^2+y^2-2\sqrt{x^2+y^2}$ és $v(x,y)=0$, az f függvény $f(x+yi)=u(x,y)+iv(x,y)$ előállításában. Így $u_x=2x-\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, és $v_y=0$, tehát $u_x=v_y$ csak $x=0$ vagy $x^2+y^2=1$ esetén teljesül. Hasonlóan kapjuk, hogy $u_y=-v_x$ csak $y=0$ vagy $x^2+y^2=1$ esetén igaz. Tehát a függvény legfeljebb $z=0$-ban és az origo középpontú egységkörön lehet differenciálható. Az egységkörön valóban differenciálható, mert ott amellett, hogy u,v kielégítik a Cauchy–Riemann-féle differenciálegyenleteket, maguk is differenciálható függvények. $z=0$-ban viszont $f'(0)=\lim\limits_{z\to 0}(1-|z|)^2/z$ nem létezik, tehát ott f nem differenciálható.

6. *Számítsuk ki az $\dfrac{e^{\pi z}}{z^4+z^2}$ függvény integrálját a $-2i$, 1 és $-1+i$ csúcsok által meghatározott zárt háromszögvonalon!* (*10 pont*)

Megoldás: Az $f(z)=\dfrac{e^{\pi z}}{z^4+z^2}$ függény szingularitási helyei 0 és $\pm i$. Ezek közül 0 és $-i$ esik a háromszög belsejébe. Egy 0 körüli kis körön integrálva az $f(z)=\dfrac{e^{\pi z}}{z^2+1}/z^2$ függvényt a Cauchy-féle integrálformulák felhasználásával a $\dfrac{2\pi i}{1!}\left(\dfrac{e^{\pi z}}{z^2+1}\right)'|_{z=0}=2\pi i\dfrac{\pi e^{\pi z}(z^2+1)-e^{\pi z}2z}{(z^2+1)^2}|_{z=0}=2\pi^2 i$ eredményt kapjuk, míg egy $-i$ körüli kis körön integrálva az $\dfrac{e^{\pi z}}{z^2(z-i)}/(z+i)$ alakban írható f függvényt, az eredmény $2\pi i\dfrac{e^{\pi z}}{z^2(z-i)}|_{z=-i}=2\pi i\dfrac{e^{-\pi i}}{2i}=\pi e^{-\pi i}=-\pi$. Tehát f integrálja a megadott háromszög mentén $-\pi+2\pi^2 i$.