Óráról maradt feladatok

7. 10 kulcsból egy olyan van, amelyik nyitja az ajtót, de nem tudjuk, melyik. Mennyi a valószínűsége, hogy hatodik próbálkozásra sikerül kinyitnunk az ajtót, ha

a) egymás után próbálgatjuk a kulcsokat, és mindig félretesszük azt, amelyik nem nyitotta az ajtót;

b) naponként csak egyszer próbálkozunk, de másnapra nem tudjuk, melyik kulcsot próbáltuk már.

Megoldás: *a) Annak a valószínűsége, hogy elsőre nem sikerül,* $\frac{9}{10}$*, annak, hogy másodikra nem sikerül, feltéve, hogy elsőre nem sikerült,* $\frac{8}{9}$*, mert már csak* 9 *kulcs közül választhatunk. Annak, hogy harmadikra nem sikerül, ha az első kettő nem volt jó,* $\frac{7}{8}$*, és így tovább, végül annak, hogy a hatodik jó lesz, ha az első öt próbálkozás sikertelen volt,* $\frac{1}{5}$*. Tehát a szorzatszabály szerint a valószínűség* $\frac{9}{10} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{7}{8} \cdots \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{10}$.
b) A próbálkozások függetlensége miatt a valószínűség $(\frac{9}{10})^5 \cdot \frac{1}{10}$.

8. 3 fehér, 4 zöld és 2 piros golyó van egy dobozban. Hármat kihúzunk egymás után visszatevés nélkül. Számítsuk ki a következő események valószínűségét.

a) Az első és a harmadik golyó színe azonos.

b) Az első fehér, feltéve, hogy az első és a harmadik színe azonos.

c) Az első és a harmadik színe azonos, feltéve, hogy az első fehér.

Megoldás: *a) Úgy tekinthetjük, hogy az egyszínű golyók is megkülönböztethetőek. Ez azt jelenti, hogy* $9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$ *fajta húzássorozat van, és ezek mind azonos valószínűségűek. Ezek közül* xyx *alakú (ahol* $y = x$ *is lehetséges)* $3 \cdot 2 \cdot 7 + 4 \cdot 3 \cdot 7 + 2 \cdot 1 \cdot 7 = 20 \cdot 7 = 140$*. (Az első és harmadik golyóról döntünk először a sorozat leírásánál, csak aztán a középsőről.) Tehát a valószínűség* $140/504 = 5/18$.
b) Az xyx *sorozatok közül a fehér-valami-fehér sorozatok száma* $3 \cdot 2 \cdot 7 = 42$*, így a valószínűség* $42/140 = 3/10$.
c) A fehérrel kezdődő sorozatok száma $3 \cdot 8 \cdot 7 = 168$*, ebből a fehér-valami-fehér sorozatoké* 42*, tehát a valószínűség* $\frac{1}{4}$.

Házi feladatok

1. (F13) Tegyük fel, hogy egy város vízellátása $0,98$ valószínűséggel akadálytalan az év bármely napján. Mekkora annak a valószínűsége, hogy egy év alatt pontosan 3 napon lesz akadálytalan a vízellátás, függetlenséget feltételezve az egyes napok vízellátása között.

2. (F14) Két út vezet A városból B városba és szintén két út B-ből C városba. Mind a négy út egymástól függetlenül, p valószínűséggel járhatatlan a hó miatt. Feltéve, hogy A-ból C-be nincs járható út, mi a valószínűsége, hogy A-ból B-be van járható út?

3. (F16) Valaki a céltábla 10-es, 20-as, 30-as, 50-es körgyűrűibe rendre $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{3}$ valószínűséggel talál. Mi a valószínűsége, hogy 15 lövésből 5 a 10-es, 3 a 20-as, 4 a 30-as, 3 az 50-es gyűrűbe talál?

4. (F42) Legyenek A, B, C teljesen független eseményeket leíró halmazok egy eseménytérben. Tegyük fel, hogy $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(B) = \frac{1}{8}$, $P(C) = \frac{1}{8}$. Mennyi a $P(A \cup B | B \cup C)$ feltételes valószínűség?

5. Egy kockát 10-szer feldobunk. Mennyi a valószínűsége, hogy a hetedik dobás egyes volt, ha tudjuk, hogy 4-szer dobtunk egyest?

6. Egy dobozban 3 fehér, 4 zöld, 2 piros golyó van. Addig húzunk belőle visszatevés nélkül, amíg egy pirosat nem húzunk. Mennyi a valószínűsége, hogy éppen 2 fehéret és 1 zöldet húzunk addig valamilyen sorrendben?

7. Egy kockával n-szer dobunk. Mi a valószínűsége, hogy nem dobjuk kétszer egymás után ugyanazt a számot?

Eredmények

1. $\binom{365}{3} \cdot 0,02^3 \cdot 0,98^{362}$

2. Legyen $X \to Y$ annak a jele, hogy X városból el lehet jutni Y városba, $X \nrightarrow Y$ pedig annak, hogy nem lehet eljutni. Ekkor $P(A \nrightarrow B) = P(B \nrightarrow C) = p^2$, $P(A \to B) = P(B \to C) = 1 - p^2$, $P(A \to C) = (1-p^2)^2$, $P(A \nrightarrow C) = 1 - (1-p^2)^2 = p^2(2-p^2)$, $P(A \to B$ és $A \nrightarrow C) = P(A \to B$ és $B \nrightarrow C) = (1-p^2)p^2$, és végül $P(A \to B | A \nrightarrow C) = (1-p^2)/(2-p^2)$.

3. $\dfrac{15!}{5! \cdot 3! \cdot 4! \cdot 3!} \cdot \left(\dfrac{1}{3}\right)^5 \cdot \left(\dfrac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\dfrac{1}{6}\right)^4 \cdot \left(\dfrac{1}{3}\right)^3$

4. $P(A+B|B+C) = P((A+B)(B+C))/P(B+C) = \frac{13}{20}$.

5. $\left(\binom{9}{3} \cdot (\frac{1}{6})^4 \cdot (\frac{5}{6})^6\right) \Big/ \left(\binom{9}{4} \cdot (\frac{1}{6})^4 \cdot (\frac{5}{6})^6\right) = \frac{2}{3}$

6. $3 \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{21}$

7. $(\frac{5}{6})^{n-1}$