Gyakorló feladatok

1. (FII/65) A házaspárok részvételi arányáról az Egyesült Államok egy elnökválasztásán a következő adataink vannak. Annak a valószínűsége, hogy szavaz a férj, $\frac{3}{5}$, hogy szavaz a feleség, $\frac{1}{2}$. Azon feleségek közül, ahol a férj szavaz, a feleség $\frac{2}{3}$ valószínűséggel szavaz.

a) Ha egy házaspárról csak azt tudjuk, hogy a feleség szavaz, mi a valószínűsége, hogy a férje is szavaz?

b) Két házaspárt véletlenszerűen kiválasztva, mi a valószínűsége, hogy e 4 személy közül pontosan 1 férfi és 1 nő vesz részt a választáson?

Megoldás: *Ha egy házaspárra N jelöli azt az eseményt, hogy a feleség szavaz, és F azt, hogy a a férj szavaz akkor $P(F) = \frac{3}{5}$, $P(N) = \frac{1}{2}$, $P(N|F) = \frac{2}{3}$.*

a) $P(F|N) = P(N|F) \cdot P(F)/P(N) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5}/\frac{1}{2} = \frac{4}{5}$

b) Az előzőekből kiszámítható:

$$\begin{aligned} P(NF) =& P(N|F) \cdot P(F) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{2}{5} = 0,4 \\ P(\bar{N}F) =& P(\bar{N}|F) \cdot P(F) = (1 - \frac{2}{3}) \cdot \frac{3}{5} = \frac{1}{5} = 0,2 \\ P(\bar{F}N) =& P(\bar{F}|N)P(N) = (1 - \frac{4}{5}) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{10} = 0,1 \\ P(\bar{F}\bar{N}) =& 1 - 0,4 - 0,2 - 0,1 = 0,3. \end{aligned}$$

Mivel a házaspárok egymástól függetlenül szavaznak, két házaspárra annak a valószínűsége, hogy pontosan egy nő és egy férfi szavaz: $2 \cdot P(NF) \cdot (\bar{N}\bar{F}) + 2 \cdot P(\bar{N}F) \cdot P(N\bar{F}) = 0,28$

2. Egy rabjának azt mondja a török szultán: “Adok neked 50 fehér és 50 fekete golyót, és két dobozt. Rakd szét a golyókat a dobozokban úgy, ahogy akarod, de mindegyikben legyen legalább egy golyó. Én csukott szemmel fogok valamelyik dobozból egy golyót kihúzni. Ha az fehér lesz, szabadon engedlek. ” Hogyan ossza szét a rab a golyókat, hogy a lehető legvalószínűbb legyen, hogy kiszabadul?

Megoldás: *Legyen D_i az az esemény, hogy a szultán az i. dobozt választja, és F az, hogy ezek után fehér golyót húz.*

A legjobb elosztás az, ha az egyik dobozba 1 fehér, a másikba 49 fehér, és 50 fekete golyó kerül. Ekkor $P(F) = P(F|D_1) \cdot P(D_1) + P(F|D_2) \cdot P(D_2) = 1 \cdot \frac{1}{2} + \frac{49}{99} \cdot \frac{1}{2}$, tehát majdnem $\frac{3}{4}$. Ennél jobb elosztás valóban nem lehet, mert ha mindkét dobozba ugyanannyi fehér és fekete golyó kerül, akkora $P(F) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, különben pedig valamelyikben a fehér több, a másikban a fekete. Ekkor feltehetjük, hogy az elsőben több a fehér. Legyen x a fehérek, y a feketék száma a második dobozban, tehát $x < y \leq 50$. Így $P(F) = P(F|D_1) \cdot \frac{1}{2} + P(F|D_2) \cdot \frac{1}{2} \leq 1 \cdot \frac{1}{2} + P(F|D_2) \cdot \frac{1}{2}$, és $P(F|D_2) = \frac{x}{x+y} \leq \frac{x}{2x+1} = \frac{1}{2} - \frac{1/2}{2x+1} \leq \frac{1}{2} - \frac{1/2}{2 \cdot 49+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{198} = \frac{49}{99}$.

Házi feladatok

1. (FII/100) Egy urnából, amely két fehér és egy piros golyót tartalmaz, húzunk egy golyót véletlenül. Megváltozik-e a piros golyó húzásának valószínűsége, ha még a húzás előtt kiveszünk egy golyót, de nem nézzük meg?

2. (II/29) Az igazak városában a lakosok 90%-a igazat mond, a hazugok városában pedig 85% hazudik. Nem tudjuk, hogy melyik városban vagyunk, egyforma eséllyel lehetünk bármelyikben. Megkérdezünk egy embert, és az azt mondja, hogy ez a hazugok városa. Mi a valószínűsége annak, hogy ez az ember hazudik?

3. (II/31) Oldjuk meg a következő, korábban tárgyalt feladatot ezúttal a Bayes-tétel segítségével! Egy embert keresünk, aki a napnak ebben az időszakában 2/3 valószínűséggel kocsmában van: a város 5 kocsmájának bármelyikében ugyanakkora eséllyel lehet. Négyben már megnéztük, és nem találtuk. Mi a valószínűsége, hogy az ötödikben van?

4. (FII/64) Egy számolásnál az egyik lépés azért kritikus, mert háromszor olyan gyakori, hogy itt valaki hibázik, mint az, hogy helyesen jár el. Ha sikeresen túljut ezen a lépésen, akkor 1 valószínűséggel nem követ el több hibát. Ha viszont téved ennél a lépésnél, akkor 30% eséllyel még egy újabb hibát is elkövet, amely pontosan kompenzálja az elsőt. Ha csak annyit tudunk, hogy valaki helyes eredményt kapott, akkor mi a valószínűsége annak, hogy végig helyesen számolt?

5. (FII/71) Két urnánk van, az egyikben két fehér és öt piros, a másikban három fehér és négy piros golyó van. Valaki véletlenszerűen kiválaszt mindkét urnából egy-egy golyót, és átteszi a másik urnába — egyidejűleg, majd húz az első urnából.
a) Mi a valószínűsége, hogy piros golyót húz?
b) Feltéve, hogy piros golyót húz, mi a valószínűsége, hogy azonos színű golyókat cserélt?

6. (FII/74) Egy üzemből a kikerülő áru 75% valószínűséggel első osztályú. A kikerült termékeket vizsgálatnak vetik alá. Annak a valószínűsége, hogy egy első osztályú árut nem első osztályúnak minősítenek, 0, 02. Annak a valószínűsége, hogy egy nem első osztályút első osztályúnak minősítenek, 0, 05. A vizsgálaton első osztályúnak minősített áruk hány százaléka lesz várhatóan valóban első osztályú?

7. (FII/27) Egy bináris csatornán a 0 jelet $\frac{1}{3}$, az 1 jelet $\frac{2}{3}$ valószínűséggel adják le. Zavarás következtében, ha 0-t adnak le, $\frac{1}{4}$ valószínűséggel 1 érkezik, ha 1-et adnak le, akkor $\frac{1}{5}$ valószínűséggel 0 érkezik.
a) Mi a valószínűsége, hogy 1 érkezik – nem figyelembe véve, hogy milyen jelet adtak le?
b) Ha a 0 jel érkezik, mi a valószínűsége, hogy 0-t adtak le?

Eredmények

1. Az első esetben a valószínűség $\frac{1}{3}$, a másodikban $0 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$, tehát nem változik meg a valószínűség.

2. I: Az igazak városában vagyunk, H: a hazugok városában vagyunk, A: a megkérdezett ember azt mondja, hogy ez a hazugok városa. Ekkor ismert $P(A|I)$, $P(A|H)$, $P(I)$, $P(H)$. A kérdezett valószínűség: $P(I|A) = 0,4$.

3. K: kocsmában van, N: nincs az első négyben. Ekkor ismert: $P(K)$, $P(N|K)$ és $P(N|\bar{K})$. A kérdezett valószínűség $P(K|N) = \frac{2}{7}$.

4. H_1: hibázik az első lépésben, J: jó eredményt kap. Ismert: $P(H_1)$, $P(\bar{H}_1)$, $P(J|H_1)$, $P(J|\bar{H}_1)$. A kérdezett valószínűség: $P(\bar{H}_1|J) = \frac{10}{19}$.

5. B_1: azonos színű golyókat cserélt, B_2: az elsőből fehéret cserélt a másodikból vett pirosra, B_3: az elsőből pirosat cserélt a másodikból vett fehérre. Ekkor $P(B_1) = \frac{26}{49}$, $P(B_2) = \frac{8}{49}$, $P(B_3) = \frac{15}{49}$. $P(A|B_1) = \frac{5}{7}$, $P(A|B_2) = \frac{6}{7}$, $P(A|B_1) = \frac{4}{7}$.
a) $P(A) = \frac{34}{49}$ b) $P(B_1|A) = \frac{65}{119}$

6. E: első osztályú, E_v: a vizsgálat első osztályúnak mutatta. Ismert: $P(E)$, $P(\bar{E}_v|E)$, $P(E_v|\bar{E})$. Ekkor $P(E|E_v) \approx 0,983$.

7. A_i: i jelet adnak, E_i: i jel érkezik. Ismert $P(A_0)$, $P(A_1)$, $P(E_1|A_0)$, $P(E_0|A_1)$.
a) $P(E_1) = \frac{37}{60}$ b) $P(A_0|E_0) = \frac{15}{23}$