Gyakorló feladatok

1. (FIII/49) A tanult nevezetes eloszlások közül melyikkel lehetne modellezni az alábbi valószínűségi változókat?

a) Hányadik autó vesz fel, amikor kiállok az országútra, mert autóstoppal akarok utazni?
b) 10 autó közül hány vesz fel stopposokat?
c) 10 perc alatt hány autó áll meg stopposoknak?

Megoldás: *a) geometriai* *b) binomiális* *c) Poisson*

2. (FIII/58) Négy postaládában összesen 12 levelet találtak. Feltéve, hogy az egyes levelek azonos valószínűséggel kerültek a négy postaláda bármelyikébe, határozzuk meg az első postaládába került levelek számának eloszlását! Feltéve, hogy a harmadik postaládába 6 levél került, határozzuk meg az első ládába került levelek eloszlását!

Megoldás: *Ha X_i jelöli az i. postaládába került levelek számát, akkor* $P(X_1 = k) = \binom{12}{k}(\frac{1}{4})^k(\frac{3}{4})^{12-k}$, *ahol* $k = 0, 1, \ldots, 12$ *(a postás minden egyes levelet* $\frac{1}{4}$ *valószínűséggel tesz az első ládába,* $\frac{3}{4}$ *valószínűséggel pedig valamelyik másikba. Mivel a levelek egymástól függetlenül kerülnek egyik vagy másik postaládába, az, hogy* 6 *kerül a harmadikba nem befolyásolja, hogy a maradék hat a másik három melyikébe kerül, azaz a második kérdésre is binomiális eloszlás a válasz:* $P(X_1 = k|X_3 = 6) = \binom{6}{k}(\frac{1}{3})^k(\frac{2}{3})^{6-k}$, *ahol* $0 \leq k \leq 6$. *De a feltételes valószínűség ké[pletével is kiszámíthatjuk:* $P(X_1 = k|X_3 = 6) = P(X_1 = k \text{ és } X_3 = 6|X_3 = 6) = \binom{12}{6}\binom{6}{k}(\frac{1}{4})^6(\frac{1}{4})^k(\frac{1}{2})^{6-k} / \left(\binom{12}{6}(\frac{1}{4})^6(\frac{3}{4})^6\right) = \binom{6}{k}(\frac{1}{2})^{6+k-12}(\frac{1}{3})^6 = \binom{6}{k}2^{6-k}(\frac{1}{3})^6 = \binom{6}{k}(\frac{1}{3})^k(\frac{2}{3})^{6-k}$.

Házi feladatok

1. (FIII/12) Két kockával dobunk. Határozzuk meg a dobott számok összegének mint valószínűségi változónak az eloszlását!

2. (FIII/17) Sok év statisztikája áll rendelkezésre arra nézve, hogy naponta hány lakástűz volt Budapesten. A napi négyes gyakoriság ugyanannyiszor fordult elő, mint az ötös gyakoriság. Becsüljük meg, hogy a napok körülbelül hány százalékában fordult elő a kettes gyakoriság!

3. (FIII/55) Egy forgalmas autópálya melletti eldugott kisvendéglőhöz délután három és négy óra között kétszer akkora valószínűséggel érkezik két autó, mint egy autó. Mennyi a valószínűsége annak, hogy egyetlen autó sem érkezik három és négy óra között?

4. Egy kockával addig dobunk, amíg két hatosunk nem lesz. Adjuk meg a dobások számának valószínűségeloszlását!

5. (FIII/57) Annak a valószínűsége, hogy egy veszélyeztetett cseresznyéskertben egy cseresznyében két kukac van, kétszer akkora, mint az, hogy nincs kukac benne. Mi a valószínűsége annak, hogy

a) 20 cseresznyében egyáltalán nincs kukac?
b) csak egy kukac van egy cseresznyében?
c) 20 cseresznyében összesen 20 kukacot találnak?

6. Egy dobozban piros és fehér golyók vannak. Ha háromszor húnunk visszatevéssel, 48% annak a valószínűsége, hogy nem csupa egyszínű golyót húzunk. Milyen arányban lehetnek a piros és fehér golyók a dobozban?

7. A megfigyelések szerint Magyarországon 1000 újszülött közül átlagosan 516 fiú. Mekkora annak a valószínűsége, hogy egy hatgyermekes családban a fiúk száma legalább annyi, mint a lányoké?

Eredmények

1. $P(X = k) = \frac{k-1}{36}$, ha $2 \leq k \leq 7$, és $\frac{13-k}{36}$, ha $8 \leq k \leq 12$.

2. Az X valószínűségi változó Poisson eloszlású, $P(X = 4) = P(X = 5)$-ből $\lambda = 5$. Így $P(X = 2) = \frac{25}{2}e^{-5} \approx 0,084$, azaz a napoknak körülbelül $8,4\%$-ában volt kettes gyakoriság.

3. X Poisson eloszlású, $P(X = 2) = 2P(X = 1)$, amiből $\lambda = 4$, és $P(X = 0) = e^{-4}$.

4. $P(X = k) = (k-1)(\frac{1}{6})^2(\frac{5}{6})^{k-2}$.

5. X az egy cseresznyében levő kukacok száma, Y a 20 cseresznyében levő kukacok száma. $P(X = 2) = 2 \cdot P(X = 0)$-ból $\lambda = 2$ a Poisson eloszlású X paraméterre. Y is Poisson-eloszlású, $\lambda = 40$ paraméterrel.
a) $P(Y = 0) = e^{-40}$, b) $P(X = 1) = 2e^{-2}$, c) $P(Y = 20) = \frac{40^{20}}{20!}e^{-40}$.

6. $3p(1-p)^2 + 3p^2(1-p) = 0,48$ összefüggésből $p = 0,8$ vagy $p = 0,2$, tehát az egyik színből négyszer annyi van, mint a másikból.

7. Ha X a fiúk száma egy hatgyermekes családban, akkor
$P(X \geq 3) = \sum_{k=3}^{6} \binom{6}{k} 0,516^k \cdot 0,484^{6-k} \approx 0,686$.