Házi feladatok

1. (FIII/24) 1000 darab piros lámpa közül 800 élte túl az 1 óra, és 751 élte túl a 2 óra használatot. Az utóbbiak közül pedig csak 452 élte túl a további 1 óra használatot. Tekinthetjük-e exponenciális eloszlásúnak a piros lámpák élettartamát?

2. (FIII/59) Egy örökifjúnak mondott villanykörtetípusról tesztelés után megállapították, hogy az izzó körülbelül azonos eséllyel ég ki x hónapnál hamarabb, x és $x+1$ hónap között valamely időpontban, illetve $x+1$ hónapnál később. Mennyi az x?

3. (FIV/9) Legyen az X valószínűségi változó sűrűségfüggvénye $f(x) = \dfrac{2}{x^2}$ $(1 < x < 2)$. Határozzuk meg az eloszlás várható értékét, mediánját és szórását!

4. (FIV/22) A polónium bomlási ideje örökifjú tulajdonságú valószínűségi változó. Egy ilyen atom 140 nap alatt $\frac{1}{2}$ valószínűséggel elbomlik.
a) Mennyi a polóniumatom várható élettartama és szórása?
b) Mekkora az az időtartam, amikor egy polóniumatom 95% valószínűséggel elbomlik?

5. (FIV/67) Egy autóstoppost az elhaladó autók mindegyike p valószínűséggel vesz fel. A stoppos megszámolja, hányadik autó vette fel — e szám valószínűségi változó.
a) Mennyi a várható értéke?
b) Mekkora a legvalószínűbb érték?

6. (FV/15) Egy régi 6 lámpás rádió lámpáinak élettartama örökifjú tulajdonságú valószínűségi változó, 3 év várható élettartammal. Mennyi a valószínűsége, hogy
a) 5 évi használat alatt egyik lámpa sem ég ki?
b) 5 évi használat alatt pontosan 2 lámpa ég ki?

7. (FV/46) Egy levél érkezése egy adott időszakban folytonos egyenletes eloszlás szerint várható. Általában március 17-én szokott érkezni, 1 nap átlagos ingadozással. Mi a valószínűsége, hogy a levél március 16. és 22. között érkezik?

Eredmények

1. Ha X egy lámpa élettartama, akkor a mintából adódó becslések: $P(X > 1) \approx 0,8$, $P(X > 3|X > 2) \approx 0,6$. Viszont exponenciális eloszlás esetén $P(X > 3|X > 2) = P(X > 1)$, tehát nem valószínű, hogy exponenciális.

2. $P(X < x) = 1 - e^{-\lambda x} = \frac{1}{3}$ és $P(X > x+1) = e^{-\lambda(x+1)} = \frac{1}{3}$. Ebből $x^\lambda = 2$, tehát $\lambda = \ln 2$, és $x = (\ln 3/\ln 2) - 1$.

3. $M(X) = 2\ln 2 \approx 1,39$, $D(X) = \sqrt{4 - 4\ln^2 2} \approx 1,44$, $F(x) = 2 - \dfrac{2}{x}$, ha $1 < x \leq 2$, és előtte 0, utána 1; végül a mediánja az $F(x) = \frac{1}{2}$ megoldása, $\frac{4}{3} \approx 1,33$.

4. a) Az $1 - e^{-140\lambda} = \frac{1}{2}$ összefüggésből $\lambda = \ln 2/140$, és így a várható érték és a szórás is $140/\ln 2 \approx 202$ nap.
b) Az $1 - e^{\lambda x} = 0,95$ egyenletből $x = 140\ln 20/\ln 2 \approx 605$ nap.

5. Ez geometriai valószínűség, így várható értéke $1/p$, legvalószínűbb értéke 1.

6. Egy lámpa élettartama X exponenciális, $\lambda = \frac{1}{3}$ paraméterrel.
a) $P(X \geq 5) = e^{-5/3}$, $P(5$ év alatt egy sem ég ki$) = e^{-10}$
b) $p = e^{-5/3}$-dal $P(5$ év alatt kettő ég ki$) = \dbinom{6}{2}(1-p)^2p^4$.

7. A levél érkezési ideje (március kezdetétől napokban számítva) X, egyenletes eloszlású, várható értéke 17, szórása 1. Tehát azon az $[a, b]$ intervallumon egyenletes, amelyre $(a+b)/2 = 17$, és $(b-a)/(2\sqrt{3}) = 1$. Ebből $a = 17 - \sqrt{3}$ és $b = 17 + \sqrt{3}$. $P(16 \leq X \leq 22) = P(16 \leq X) = (17 + \sqrt{3} - 16)/(2\sqrt{3}) = (1+\sqrt{3})/(2\sqrt{3}) \approx 0,79$.