Házi feladatok

1. (FIV/34) Egy X valószínűségi változóra a következőket mérték:

$$4;\quad 3,5;\quad 0;\quad 3,5;\quad 1;\quad 1.$$

Határozzuk meg a mintához tartozó
a) tapasztalati eloszlásfüggvényt,
b) tapasztalati várható értéket és szórást!

2. (FVII/27) Egy botot két, egymástól függetlenül, egyenletesen választott helyen eltörünk. Mi a valószínűsége annak, hogy a középső darab hosszabb a bot felénél?

3. (FVII/31) Két osztópontot választunk egyenletes eloszlás szerint, egymástól függetlenül a $(0, 1)$ intervallumban. Mi a valószínűsége, hogy a keletkező három szakaszból háromszög szerkeszthető?

4. (FVII/28) Mi a valószínűsége annak, hogy az $x^2 + bx + c = 0$ egyenletnek nincs valós gyöke, feltéve, hogy a b és c együtthatók egyenletes eloszlású valószínűségi változók a $(0, 4)$ intervallumban?

5. (FVII/50) Egy ejtőernyős egy 1500 m^2-es területre ugrik egyenletes eloszlás szerint. Sikeres az ugrás, ha egy adott 1000 m^2-es területen ér földet. Különdíj jár, ha ezen belül egy adott 10 m sugarú körön belül ér földet. Feltéve, hogy az ugrása sikeres, mi a valószínűsége annak, hogy különdíjat is kap?

6. (FVII/61) Ketten randevút beszélnek meg 12.30 és 12.45 között. Ha mindketten egyenletes eloszlás szerint és egymástól függetlenül érkeznek, akkor mi a valószínűsége, hogy egyiküknek sem kell 5 percnél tovább várnia? Mit állíthatunk akkor, ha a függetlenség feltételét elejtjük?

7. (FVII/62) Egy $10\times10\ \mathrm{cm}^2$ területű, adott vastagságú törökméz ára 30 Ft. Amikor múltkor vettem egyet, az árus csak úgy körülbelül jelölte be a két oldalát, egymástól függetlenül, így egy olyan téglalap alakú darabot kaptam, amelynek oldalai egyenletes eloszlásúak 9 cm és 11 cm között. Minek nagyobb a valószínűsége: annak, hogy jól jártam, vagy annak, hogy rosszul jártam?

Eredmények

1. A tapasztalati eloszlásfüggvény:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \le 0 \\ 1/6 & \text{ha } 0 < x \le 1 \\ 1/2 & \text{ha } 1 < x \le 3,5 \\ 5/6 & \text{ha } 3,5 < x \le 4 \\ 1 & \text{ha } 4 < x \end{cases}$$

A tapasztalati várható érték 13/6, a tapasztalati szórás pedig $\sqrt{86}/6$.

2. Tegyük fel, hogy a bot hossza 1, és az egyik végponttól x és y távolságra van a két töréspont. $0 \le x, y \le 1$, és a kedvező esetek azok, amikor $y - x > \frac{1}{2}$, illetve amikor

$x - y > \frac{1}{2}$. A valószínűség az egységnégyzetben a feltételeket kielégítő koordinátájú pontok által lefedett terület aránya az egész négyzet területéhez, azaz 1/4.

3. Ha $x < y$ a két osztópont, akkor a feltételek a háromszögegyenlőtlenség alapján': $y > 1 - y$, $x < 1 - x$ és $y - x < 1 - (y - x)$. (Az $y < x$ esetén hasonló feltételek írhatók fel.) Ebből a valószínűség 1/4.

4. A $[0,4] \times [0,4]$ négyzetben a $b^2 - c < 0$ feltételt kielégítő (b, c) pontok által lefedett terület $\int_0^4 (4 - x^2/4)\,dx = 32/3$, így a valószínűség 2/3.

5. $100\pi/1000 = \pi/10$

6. A $[0,15] \times [0,15]$ négyzetben az $|y - x| < 5$ feltételt kielégítő pontokat kell meghatározni. A valószínűség 5/9.

7. A $[9,11] \times [9,11]$ intervallumban az $xy \geq 100$ feltételt kielégítő pontokat kell meghatározni. A valószínűség $\frac{1}{4} \cdot \int_{100/11}^{11} (\frac{100}{x} - 9)\,dx = \frac{1}{4}(200 \ln 1,1 - 17) \approx 0,5155$.