Házi feladatok

1. (FIV/11 mintájára) Az X valószínűségi változó sűrűségfüggvénye $f(x) = 2/x^3$, ha $x > 1$. Mely c értékekre minimális (ha van ilyen c érték)
a) az $M(|X-c|)$ érték?
b) az $M((X-c)^2)$ érték?

2. (FIV/21) Azt mondják a zöldségesek, hogy 100 esetből körülbelül ötször fordul elő, hogy egy zsák krumpli súlya az előírttól 50 dekával többel tér el. Normális eloszlás alkalmazásával mire következtethetünk ebből a zsákok súlyának szórására vonatkozóan?

3. (FV/4) Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók, 1 várható értékkel és 25 szórásnégyzettel. Adjunk meg olyan x értéket, melyre teljesül, hogy $P(\sum_{i=1}^{742} X_i > x) = 0,34$.

4. (FV/25) Egy dobozban sok ellenállásunk van, értékeik egymástól függetlenül $0,3\,\Omega$ és $0,5\,\Omega$ között egyenletes eloszlásúak. 100-at sorosan kötve közelítőleg mekkora a valószínűsége, hogy eredő ellenállásuk nagyobb $41\,\Omega$-nál?

5. (FV/27) Egy útkereszteződésnél az átlagos zajszint 45 dB. 100 mérés közül kb. tízszer fordul elő, hogy 50 dB fölé emelkedik a zaj. Milyen gyakran fordul elő, hogy 37 dB alá süllyed a zajszint?

6. (FV/29) Százszor feldobunk egy forintos érmét. Mennyi a valószínűsége annak, hogy az írást eredményező dobások száma 45 és 50 közé esik?

7. (FV/54) 1000 darab, két tizedesjegyre kiszámított valós számot adunk össze. Mindegyik számnak van valamennyi kerekítési hibája, amelyet egyenletes eloszlásúnak tekinthetünk a $(-0,05,\ 0,05)$ intervallumban. Mi a valószínűsége, hogy az összeg a valódi összegtől 2-vel kevesebbel tér el?

Eredmények

1. Az $M(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)\,dx$ képlet alapján $M(|X-c|) = \int_{-\infty}^{\infty} |x-c|f(x)\,dx$, és ez $c = \sqrt{2}$ esetén minimális. Másképpen: $M(|X-c|)$ akkor minimális, ha c az X mediánja, azaz az $F(c) = 1 - \frac{1}{c^2} = \frac{1}{2}$ egyenlet megoldása ($c > 1$ feltétellel, ui. $F(x) = 0$, ha $x \le 1$).
b) $M((X-c)^2) = \infty$ minden c-re, tehát nincs ilyen c.

2. Ha m kilogramm az előírt tömeg, és σ kg a szórás, akkor a feltétel szerint $P(|X-m| > 0,5) = 0,05$, amiből $\Phi(\frac{1}{2\sigma}) = 0,975$, és így $\sigma = 0,255$ kg.

3. A centrális határeloszlástétel alapján az adott x-re azt kapjuk, hogy $\Phi\left(\dfrac{x-742}{5\sqrt{742}}\right) = 0,66$, így $\dfrac{x-742}{5\sqrt{742}} = 0,4125$, amiből $x = 798,18$.

4. A $[0,3; 0,5]$ intervallumon vett egyenletes eloszlásról tudjuk, hogy várható értéke $m = 0,4$, szórása $\sigma = 0,2/2\sqrt{3} = 0,0577$. Így a centrális határeloszlástételt alkalmazva a keresett valószínűség $1 - \Phi\left(\frac{41-40}{10\cdot 0,0577}\right) = 0,0415$.

5. A zajszintet normális eloszlásúnak tekinthetjük 45 várható értékkel és ismeretlen σ szórással. Erre $P(X > 50) = 0,1$, azaz $1 - \Phi(5/\sigma) = 0,1$, amiből $5/\sigma = 1,28$, és ebből a kérdezett valószínűség $P(X < 37) = \Phi(-8/\sigma) = 0,02$

6. A binomiális eloszlás szerint a keresett valószínűség $\displaystyle\sum_{k=45}^{50} \binom{100}{k} \frac{1}{2^{100}}$, és ez közelíthető az $m = 50$ és $\sigma = \sqrt{100 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = 5$ paraméterű normális eloszlás sűrűségfüggvényének értékösszegével a megfelelő k helyeken, azaz a $\sum_{k=45}^{50} \varphi(\frac{k-50}{5})$ összeggel, ami közelítőleg $\Phi(\frac{50,5-50}{5}) - \Phi(\frac{44,5-50}{5}) \approx 0,404$.

7. A kerekítési hibák összeadódnak, tehát ha X_i az i. szám kerekítési hibája, akkor a $P(|\sum X_i| < 2)$ valószínűséget keressük. Az X_i várható értéke $m = 0$, szórása $0,1/2\sqrt{3}$, és a valószínűség a centrális határeloszlástétel alapján $2\Phi(2,19) - 1 = 0,97$.